

516.0076

PH121L

NGUYỄN PHÚ KHÁNH

ĐẠU THANH KỲ - NGUYỄN MINH NHIÊN

NGUYỄN ANH TRƯỜNG - NGUYỄN TẤN SIÊNG

ĐỖ NGỌC THỦY

(Nhóm giáo viên chuyên toán trường THPT)

PHÂN LOẠI & PHƯƠNG PHÁP GIẢI

HÌNH HỌC

(Tái Bản, Sửa Chữa Và Bổ Sung)

- Dành cho học sinh lớp 10 ôn tập và nâng cao kiến thức
- Biên soạn theo nội dung sách giáo khoa của bộ GD&ĐT

10



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PH 121 L NGUYỄN PHÚ KHANH
ĐẬU THANH KỲ - NGUYỄN MINH NHIÊN
NGUYỄN ANH TRƯỜNG - NGUYỄN TẤN SIÊNG
ĐỖ NGỌC THỦY
(Nhóm giáo viên chuyên toán trường THPT)

PHÂN LOẠI & PHƯƠNG PHÁP GIẢI HÌNH HỌC

(Tái Bản, Sửa Chữa và Bổ Sung)

- Dành cho học sinh lớp 10 ôn tập và nâng cao kiến thức
- Biên soạn theo nội dung sách giáo khoa của bộ GD&ĐT

10

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

ĐVL 13392 14

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến!

“Phân loại và phương pháp giải Hình học 10” là một trong những cuốn thuộc bộ sách “Phân loại và phương pháp giải lớp 10,11,12”, do nhóm tác giả chuyên toán THPT biên soạn.

Với cách viết khoa học và sinh động, cuốn sách sẽ giúp bạn đọc tiếp cận với môn Toán một cách tự nhiên, không áp lực, bạn đọc trở nên tự tin và năng động hơn; hiểu rõ bản chất, biết cách phân tích để tìm ra trọng tâm của vấn đề và biết giải thích, lập luận cho từng bài toán. Sự đa dạng của hệ thống bài tập và tình huống giúp bạn đọc luôn hứng thú khi giải toán.

Tác giả chú trọng biên soạn những câu hỏi mở, nội dung cơ bản bám sát sách giáo khoa và cấu trúc đề thi Đại học, đồng thời phân bài tập thành các dạng toán có lời giải chi tiết. Hiện nay đề thi Đại học không khó, tổ hợp của nhiều vấn đề đơn giản, nhưng chứa nhiều câu hỏi mở nếu không nắm chắc lý thuyết sẽ lúng túng trong việc tìm lời giải bài toán. Với một bài toán, không nên thỏa mãn ngay với một lời giải mình vừa tìm được mà phải cố gắng tìm nhiều cách giải nhất cho bài toán đó, mỗi một cách giải sẽ có thêm phần kiến thức mới ôn tập.

Môn Toán là một môn rất ưa phong cách tài tử, nhưng phải là tài tử một cách sáng tạo và thông minh. Khi giải một bài toán, thay vì dùng thời gian để lục lọi trí nhớ, thì ta cần phải suy nghĩ phân tích để tìm ra phương pháp giải quyết bài toán đó. Đối với Toán học, không có trang sách nào là thừa. Từng trang, từng dòng đều phải hiểu. Môn Toán đòi hỏi phải kiên nhẫn và bền bỉ ngay từ những bài tập đơn giản nhất, những kiến thức cơ bản nhất. Vì chính những kiến thức cơ bản mới giúp bạn đọc hiểu được những kiến thức nâng cao sau này.

Ludwig Van Beethoven từng nói: “Giọt nước có thể làm mòn tảng đá, không phải vì giọt nước có sức mạnh, mà do nước chảy liên tục ngày đêm. Chỉ có sự phấn đấu không mệt mỏi mới đem lại tài năng. Do đó ta có thể khẳng định, không nhích từng bước thì không bao giờ có thể đi xa ngàn dặm”.

Mặc dù tác giả đã dành nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự phản biện và góp ý quý báu của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Thay mặt nhóm biên soạn
Nguyễn Phú Khánh

Chương 1

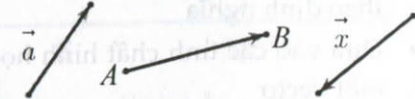
VECTƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa vectơ:

Vectơ là đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.



Hình 1.1

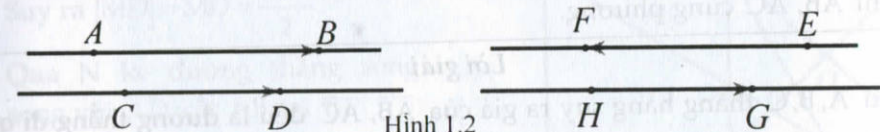
Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B ta kí hiệu: $\overrightarrow{AB}$

Vectơ còn được kí hiệu là: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối. Kí hiệu là $\vec{0}$

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng.

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là giá của vectơ
- Hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau gọi là hai vectơ cùng phương
- Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng.



Hình 1.2

Ví dụ: Ở hình vẽ trên (hình 2) thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng còn $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{HG}$ ngược hướng.

Đặc biệt: vectơ – không cùng hướng với mọi vectơ.

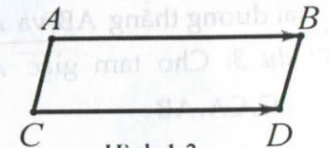
3. Hai vectơ bằng nhau

- Độ dài đoạn thẳng AB gọi là độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$.

Vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

- Hai vectơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Ví dụ: (hình 1.3) Cho hình bình hành ABCD khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



Hình 1.3

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH MỘT VECTOR; PHƯƠNG, HƯỚNG CỦA VECTOR; ĐỘ DÀI CỦA VECTOR

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Xác định một vector và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vector theo định nghĩa
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vector

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD. Có bao nhiêu vector khác vector-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác.

Lời giải

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B ta xác định được hai vector khác vector-không là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$. Mà từ bốn đỉnh A, B, C, D của tứ giác ta có 6 cặp điểm phân biệt do đó có 12 vector thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải

Nếu A, B, C thẳng hàng suy ra giá của $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ đều là đường thẳng đi qua ba điểm A, B, C nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương khi đó đường thẳng AB và AC song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này cùng đi qua điểm A nên hai đường thẳng AB và AC trùng nhau hay ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

- Xác định các vector khác vector - không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.
- Xác định các vector khác vector - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.
- Vẽ các vector bằng vector $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B.

Lời giải (Hình 1.4)

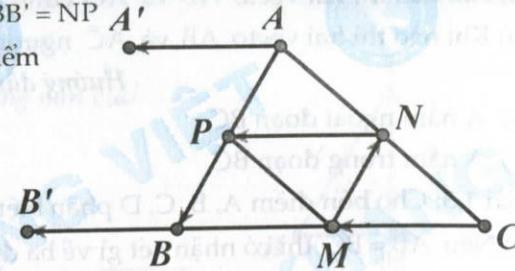
- Các vector khác vector không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$.

- Các vector khác vector - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$.

- Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$. Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là vector có điểm đầu là B và bằng vector $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP. Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là vector có điểm đầu là A và bằng vector $\overrightarrow{NP}$.



Hình 1.4

Ví dụ 4: Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của vector sau: $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$.

Lời giải (hình 1.5)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.

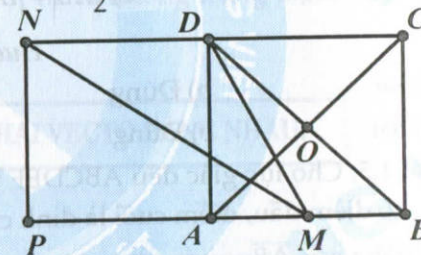
Khi đó tứ giác ADNP là hình vuông và

$$PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$



Hình 1.5

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.1: Cho ngũ giác ABCDE. Có bao nhiêu vector khác vector-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Hướng dẫn giải

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B ta xác định được hai vector khác vector-không là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$. Mà từ năm đỉnh A, B, C, D, E của ngũ giác ta có 10 cặp điểm phân biệt do đó có 20 vector thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1.2: Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.

- a) Khi nào thì hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng ?
b) Khi nào thì hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng ?

Hướng dẫn giải

- a) A nằm ngoài đoạn BC
b) A nằm trong đoạn BC

Bài 1.3: Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

- a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì có nhận xét gì về ba điểm A, B, C
b) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì có nhận xét gì về bốn điểm A, B, C, D

Hướng dẫn giải

- a) B là trung điểm của AC
b) A, B, C, D thẳng hàng hoặc ABCD là hình bình hành, hình thoi, hình vuông, hình chữ nhật

Bài 1.4: Cho hình thoi ABCD có tâm O. Hãy cho biết khẳng định nào sau đây đúng ?

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$
d) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$ e) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ f) $2|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BD}|$

Hướng dẫn giải

- a) Sai b) Đúng c) Đúng
d) Sai e) Đúng f) Sai

Bài 1.5: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Hãy tìm các vector khác vector-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho

- a) Bằng với $\overrightarrow{AB}$ b) Ngược hướng với $\overrightarrow{OC}$

Hướng dẫn giải

- a) $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ b) $\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}$

Bài 1.6: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O và M là trung điểm AB.

Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

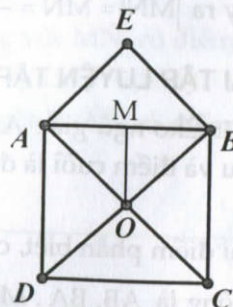
Hướng dẫn giải

Ta có $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$; $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

$$|\overrightarrow{OA}| = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{OM}| = OM = \frac{a}{2}$$

Gọi E là điểm sao cho tứ giác OBEA là hình bình hành khi đó nó cũng là hình vuông

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = OE = AB = a$



Hình 1.40

Bài 1.7: Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG.

Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BI}$.

Hướng dẫn giải

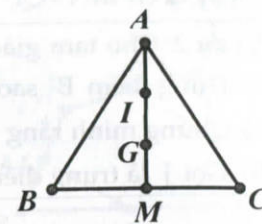
Ta có $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$

Gọi M là trung điểm của BC

Ta có

$$|\overrightarrow{AG}| = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$|\overrightarrow{BI}| = BI = \sqrt{BM^2 + MI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$



Hình 1.41

Bài 1.8: Cho trước hai điểm A, B phân biệt. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|.$$

Hướng dẫn giải

$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow MA = MB \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AB

DẠNG TOÁN 2: CHỨNG MINH HAI VECTO BẰNG NHAU.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Để chứng minh hai vector bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

2. CÁC VÍ DỤ.

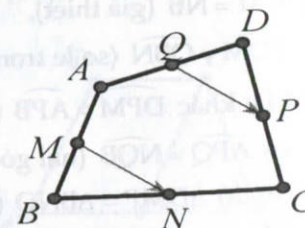
Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải (hình 1.6)

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC

Suy ra $MN \parallel AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP \parallel AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$ (2).



Hình 1.6

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel QP$ và $MN = QP$
do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vậy ta có $\overline{MN} = \overline{QP}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC .

Dựng điểm B' sao cho $\overline{B'B} = \overline{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overline{BI} = \overline{IC}$

b) Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overline{BJ} = \overline{IG}$.

Lời giải (hình 1.7)

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overline{BI}$ cùng hướng với $\overline{IC}$ do đó hai vector $\overline{BI}, \overline{IC}$ bằng nhau hay $\overline{BI} = \overline{IC}$.

b) Ta có $\overline{B'B} = \overline{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $BB' \parallel AG$.

Do đó $\overline{BJ}, \overline{IG}$ cùng hướng (1).

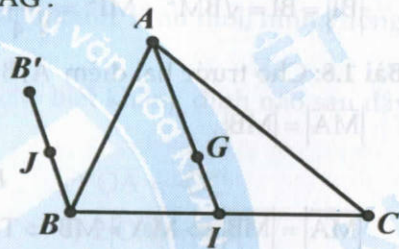
Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$IG = \frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra

$BJ = \frac{1}{2}BB'$

Vì vậy $BJ = IG$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overline{BJ} = \overline{IG}$.



Hình 1.7

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Chứng minh rằng $\overline{AM} = \overline{NC}$ và $\overline{DP} = \overline{QB}$.

Lời giải (hình 1.8)

Ta có $DM = BN \Rightarrow AN = MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành

Suy ra $\overline{AM} = \overline{NC}$.

Xét tam giác $\triangle DMP$ và $\triangle BNQ$ ta có

$DM = NB$ (giả thiết),

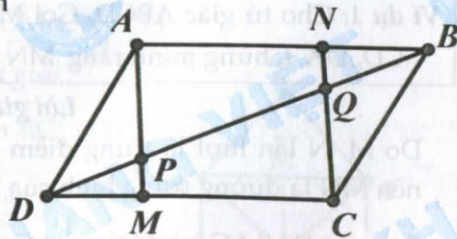
$\widehat{PDM} = \widehat{QBN}$ (so le trong)

Mặt khác $\widehat{DPM} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh)

và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\triangle DMP = \triangle BNQ$ (c.g.c) suy ra $DP = QB$.

Dễ thấy $\overline{DP}, \overline{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overline{DP} = \overline{QB}$.



Hình 1.8

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.9: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $\overline{MQ} = \overline{NP}$.

Hướng dẫn giải

Do M, Q lần lượt là trung điểm của AB và AD nên MQ là đường trung bình của tam giác ABD suy

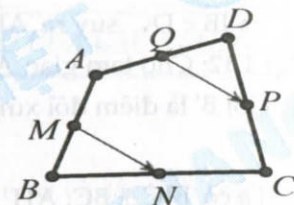
ra $MQ \parallel BD$ và $MQ = \frac{1}{2}BD$ (1).

Tương tự NP là đường trung bình của tam giác

CBD suy ra $NP \parallel BD$ và $NP = \frac{1}{2}BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MQ \parallel NP$ và $NP = MQ$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vậy ta có $\overline{MQ} = \overline{NP}$.



Hình 1.42

Bài 1.10: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB ; P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Chứng minh rằng $\overline{DM} = \overline{NB}$ và $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$.

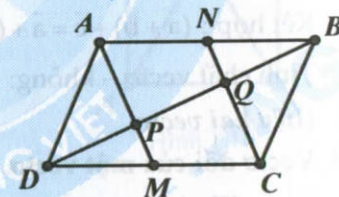
Hướng dẫn giải

Ta có tứ giác $DMBN$ là hình bình hành vì $DM = NB = \frac{1}{2}AB$, $DM \parallel NB$.

Suy ra $\overline{DM} = \overline{NB}$.

Xét tam giác CDQ có M là trung điểm của DC và $MP \parallel QC$ do đó P là trung điểm của DQ . Tương tự xét tam giác ABP suy ra được Q là trung điểm của PB

Vì vậy $DP = PQ = QB$ từ đó suy ra $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$



Hình 1.43

Bài 1.11: Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overline{CI} = \overline{DA}$. Chứng minh rằng

a) $\overline{AD} = \overline{IC}$ và $\overline{DI} = \overline{CB}$

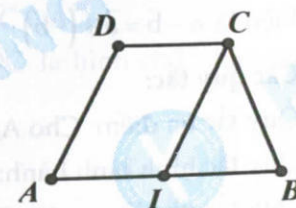
b) $\overline{AI} = \overline{IB} = \overline{DC}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overline{CI} = \overline{DA}$ suy ra $AICD$ là hình bình hành
 $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{IC}$

Ta có $DC = AI$ mà $AB = 2CD$ do đó $AI = \frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow I$ là trung điểm AB



Hình 1.44

Ta có $DC = IB$ và $DC \parallel IB \Rightarrow$ tứ giác $BCDI$ là hình bình hành

Suy ra $\overline{DI} = \overline{CB}$

- b) I là trung điểm của $AB \Rightarrow \overline{AI} = \overline{IB}$ và tứ giác $BCDI$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{IB} = \overline{DC}$ suy ra $\overline{AI} = \overline{IB} = \overline{DC}$

Bài 1.12: Cho tam giác ABC có trực tâm H và O tâm là đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng B qua O . Chứng minh: $\overline{AH} = \overline{B'C}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $B'C \perp BC$, $AH \perp BC \Rightarrow B'C \parallel AH$, $B'A \perp BA$, $CH \perp AB \Rightarrow B'A \parallel CH$

Suy ra $AHCB'$ là hình bình hành do đó $\overline{AH} = \overline{B'C}$.

§2 TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTOR

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tổng hai vector

- a) **Định nghĩa:** Cho hai vector $\vec{a}$; $\vec{b}$. Từ điểm A tùy ý vẽ $\overline{AB} = \vec{a}$ rồi từ B vẽ $\overline{BC} = \vec{b}$ khi đó vector $\overline{AC}$ được gọi là tổng của hai vector $\vec{a}$; $\vec{b}$.

Kí hiệu $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (Hình 1.9)

b) Tính chất:

- + Giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- + Kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- + Tính chất vector - không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\forall \vec{a}$

2. Hiệu hai vector

a) Vector đối của một vector.

Vector đối của vector $\vec{a}$ là vector ngược hướng và cùng độ dài với vector $\vec{a}$

Kí hiệu $-\vec{a}$

Như vậy $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, $\forall \vec{a}$ và $\overline{AB} = -\overline{BA}$

b) Định nghĩa hiệu hai vector:

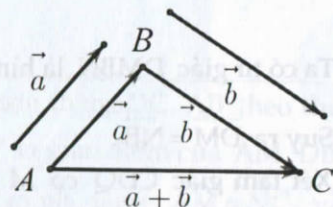
Hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vector $\vec{a}$ và vector đối của vector $\vec{b}$. Kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

3. Các quy tắc:

Quy tắc ba điểm: Cho A, B, C tùy ý, ta có: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$

Quy tắc về hiệu vector: Cho O, A, B tùy ý ta có: $\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB}$



Hình 1.9

Chú ý: Ta có thể mở rộng quy tắc ba điểm cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ thì

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI TỔNG, HIỆU CỦA CÁC VECTOR.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để xác định độ dài tổng hiệu của các vector

- Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vector và các tính chất, quy tắc để xác định phép toán vector đó.
- Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lý Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vector đó.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$.

Tính độ dài của các vector $\overline{AB} + \overline{BC}$, $\overline{AC} - \overline{BC}$ và $\overline{AB} + \overline{AC}$.

Lời giải (hình 1.10)

Theo quy tắc ba điểm ta có

- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

$$\text{Mà } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = a\sqrt{5} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Do đó } |\overline{AB} + \overline{BC}| = |\overline{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

- $\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$

$$\text{Ta có } AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

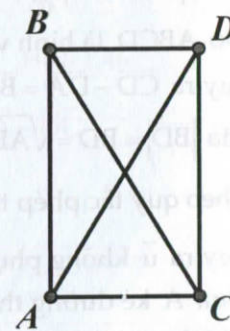
$$\text{Vì vậy } |\overline{AC} - \overline{BC}| = |\overline{AB}| = AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

- Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD = BC = a\sqrt{5}$

$$\text{Vậy } |\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AD}| = AD = a\sqrt{5}$$



Hình 1.10

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $|\overline{AB} + \overline{AD}|$, $|\overline{OA} - \overline{BO}|$, $|\overline{CD} - \overline{DA}|$

b) Chứng minh rằng $\vec{u} = \overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC} - \overline{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M. Tính độ dài vector $\vec{u}$

Lời giải (hình 1.11)

a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$

Suy ra $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AC}| = AC$.

Áp dụng định lý Pitago ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}a$$

Vậy $|\overline{AB} + \overline{AD}| = a\sqrt{2}$

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overline{OA} = \overline{CO}$

suy ra $\overline{OA} - \overline{CB} = \overline{CO} - \overline{BO} = \overline{CB}$

Vậy $|\overline{OA} - \overline{BO}| = |\overline{CB}| = a$

+ Do ABCD là hình vuông nên $\overline{CD} = \overline{BA}$

suy ra $\overline{CD} - \overline{DA} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BD}$

Mà $|\overline{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ suy ra $|\overline{CD} - \overline{DA}| = a\sqrt{2}$

b) Theo quy tắc phép trừ ta có: $\vec{u} = (\overline{MA} - \overline{MC}) + (\overline{MB} - \overline{MD}) = \overline{CA} + \overline{DB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C'.

Khi đó tứ giác ADBC' là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song) suy ra $\overline{DB} = \overline{AC'}$

Do đó $\vec{u} = \overline{CA} + \overline{AC'} = \overline{CC'}$

Vì vậy $|\vec{u}| = |\overline{CC'}| = BC + BC' = a + a = 2a$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

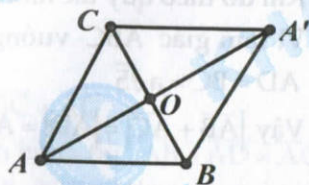
Bài 1.13: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính độ dài của các vector sau $\overline{AB} - \overline{AC}$, $\overline{AB} + \overline{AC}$.

Hướng dẫn giải

Theo quy tắc phép trừ ta có

$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB} \Rightarrow |\overline{AB} - \overline{AC}| = BC = a$$

Gọi A' là đỉnh của hình bình hành ABA'C và O là tâm hình bình hành đó.



Hình 1.45

Khi đó ta có $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AA'}$.

Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $|\overline{AB} + \overline{AC}| = AA' = 2AO = a\sqrt{3}$

Bài 1.14: Cho hình vuông ABCD có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $|\overline{AB} + \overline{OD}|$, $|\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD}|$

b) Tính độ dài vector $\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overline{OD} = \overline{BO} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{OD} = \overline{AB} + \overline{BO} = \overline{AO}$

$$|\overline{AB} + \overline{OD}| = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ta có $\overline{OC} = \overline{AO}$ suy ra

$$\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{AB} - \overline{AO} + \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{OD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD}| = 0$$

b) Áp dụng quy tắc phép trừ ta có

$$\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD} = (\overline{MA} - \overline{MB}) - (\overline{MC} - \overline{MD}) = \overline{BA} - \overline{DC}$$

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A

Khi đó $-\overline{DC} = \overline{AB'} \Rightarrow \overline{BA} - \overline{DC} = \overline{BA} + \overline{AB'} = \overline{BB'}$

Suy ra $|\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD}| = |\overline{BB'}| = BB' = 2a$

Bài 1.15: Cho hình thoi ABCD cạnh a và $\widehat{BCD} = 60^\circ$. Gọi O là tâm hình thoi.

Tính $|\overline{AB} + \overline{AD}|$, $|\overline{OB} - \overline{DC}|$.

Hướng dẫn giải

Ta có $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AC}| = 2a \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$,

$$|\overline{OB} - \overline{DC}| = |\overline{CO}| = a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bài 1.16: Cho bốn điểm A, B, C, O phân biệt có độ dài ba vector $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ cùng bằng a và $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$

a) Tính các góc AOB, BOC, COA

b) Tính $|\overline{OB} + \overline{AC} - \overline{OA}|$

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết suy ra ba điểm A, B, C tạo thành tam giác đều nhận O làm trọng tâm do đó $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$

- b) Gọi I là trung điểm BC. Theo câu a) ΔABC đều nên $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OA}| = a\sqrt{3}$$

Bài 1.17: Cho góc Oxy. Trên Ox, Oy lấy hai điểm A, B. Tìm điều kiện của A, B sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ nằm trên phân giác của góc Oxy.

Hướng dẫn giải

Dựng hình bình hành OACB. Khi đó: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

Vậy $\overrightarrow{OC}$ nằm trên phân giác góc xOy $\Leftrightarrow$ OACB là hình thoi $\Leftrightarrow OA = OB$.

DẠNG TOÁN 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTOR.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Để chứng minh đẳng thức vector ta có các cách biến đổi: vẽ này thành vẽ kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vector.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải **hướng đích**, chẳng hạn biến đổi về phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi về phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$

Lời giải

- a) Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned} VT &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) \\ &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP \quad (\text{ĐPCM}) \end{aligned}$$

- b) Đẳng thức tương đương với

$$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \quad (\text{đúng}) \quad (\text{ĐPCM}).$$

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

Lời giải (Hình 1.12)

- a) Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$
 $= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$

Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \text{ suy ra}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

- b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

- c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$
 $= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \quad (\text{đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành})$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

- a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên

$PN \parallel BM, MN \parallel BP$ suy ra tứ giác BMNP là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$$

N là trung điểm của AC $\Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} &= (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0} \end{aligned}$$

- b) Vì tứ giác APMN là hình bình hành

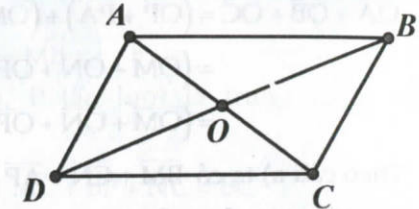
nên theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}, \text{ kết hợp với quy tắc phép trừ}$$

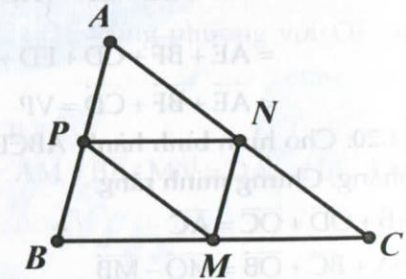
$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$$

Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$$



Hình 1.12



Hình 1.13

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= (\vec{OP} + \vec{PA}) + (\vec{OM} + \vec{MB}) + (\vec{ON} + \vec{NC}) \\ &= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) + \vec{PA} + \vec{MB} + \vec{NC} \\ &= (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) - (\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP})\end{aligned}$$

Theo câu a) ta có $\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP} = \vec{0}$ suy ra $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.18: Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng

a) $\vec{DA} - \vec{CA} = \vec{DB} - \vec{CB}$ b) $\vec{AC} + \vec{DA} + \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{CD} + \vec{BA}$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng quy tắc phép trừ ta có

$$\vec{DA} - \vec{CA} = \vec{DB} - \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{DA} - \vec{DB} = \vec{CA} - \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{BA} \text{ (đúng)}$$

b) Áp dụng quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\vec{AC} + \vec{DA} + \vec{BD} &= \vec{AD} - \vec{CD} + \vec{BA} \Leftrightarrow (\vec{DA} + \vec{AC}) + \vec{BD} = (\vec{BA} + \vec{AD}) - \vec{CD} \\ &\Leftrightarrow \vec{DC} + \vec{BD} = \vec{BD} - \vec{CD} \text{ (đúng)}\end{aligned}$$

Bài 1.19: Cho các điểm A, B, C, D, E, F.

Chứng minh rằng $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(\vec{AD} - \vec{AE}) + (\vec{BE} - \vec{BF}) + (\vec{CF} - \vec{CD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{ED} + \vec{FE} + \vec{DF} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{EF} + \vec{FE} = \vec{0} \text{ (đúng)}$$

$$\begin{aligned}\text{Cách 2: } \vec{VT} &= \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = (\vec{AE} + \vec{ED}) + (\vec{BF} + \vec{FE}) + (\vec{CD} + \vec{DF}) \\ &= \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} + \vec{ED} + \vec{FE} + \vec{DF} \\ &= \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} = \vec{VP}\end{aligned}$$

Bài 1.20: Cho hình bình hành ABCD tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\vec{AB} + \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{AC}$ b) $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{OB} = \vec{OD}$
c) $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{OB} = \vec{MO} - \vec{MB}$

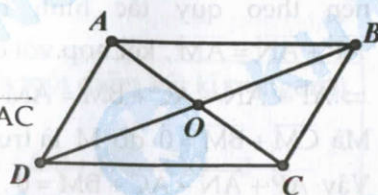
Hướng dẫn giải

a) Ta có $\vec{OD} = \vec{BO}$ do đó

$$\vec{AB} + \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{AB} + \vec{BO} + \vec{OC} = \vec{AO} + \vec{OC} = \vec{AC}$$

b) Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{OB} = \vec{BD} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{BD} = \vec{OD}$$



Hình 1.47

c) Theo câu b) ta có $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{OB} = \vec{OD}$

Theo quy tắc trừ ta có $\vec{MO} - \vec{MB} = \vec{BO}$

Mà $\vec{OD} = \vec{BO}$ suy ra $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{OB} = \vec{MO} - \vec{MB}$

Bài 1.21: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) $\vec{NA} + \vec{PB} + \vec{MC} = \vec{0}$

b) $\vec{MC} + \vec{BP} + \vec{NC} = \vec{BC}$

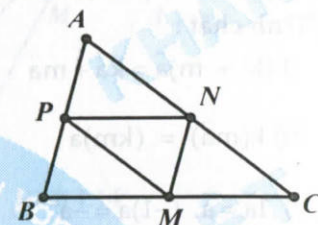
Hướng dẫn giải

a) Vì $\vec{PB} = \vec{AP}$, $\vec{MC} = \vec{PN}$ nên

$$\vec{NA} + \vec{PB} + \vec{MC} = \vec{NA} + \vec{AP} + \vec{PN} = \vec{NP} + \vec{PN} = \vec{0}$$

b) Vì $\vec{MC} = \vec{BM}$ và kết hợp với quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành ta có

$$\vec{MC} + \vec{BP} + \vec{NC} = \vec{BM} + \vec{BP} + \vec{NC} = \vec{BN} + \vec{NC} = \vec{BC}$$



Hình 1.48

Bài 1.22: Cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} = \vec{0}$

Hướng dẫn giải

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\begin{aligned}\vec{B'B} + \vec{CC'} + \vec{D'D} &= (\vec{AB} - \vec{AB'}) + (\vec{AC'} - \vec{AC}) + (\vec{AD} - \vec{AD'}) \\ &= (\vec{AB} + \vec{AD}) - \vec{AC} - (\vec{AB'} + \vec{AD'}) + \vec{AC'} = \vec{0}\end{aligned}$$

Bài 1.23: Cho ngũ giác đều ABCDE tâm O.

Chứng minh rằng $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\vec{u} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OE} + \vec{OF}$

Vì ngũ giác đều nên vector $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OE}$ cùng phương với $\vec{OF}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{OF}$.

Tương tự $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{OE}$ suy ra $\vec{u} = \vec{0}$.

Bài 1.24: Cho hình bình hành ABCD. Đặt $\vec{AM} = \vec{BA}$, $\vec{MN} = \vec{DA}$, $\vec{NP} = \vec{DC}$,

$$\vec{PQ} = \vec{BC}.$$

Chứng minh rằng: $\vec{AQ} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

Theo quy tắc ba điểm ta có $\vec{AQ} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PQ} = \vec{BA} + \vec{DA} + \vec{DC} + \vec{BC}$

Mặt khác $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$, $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$ suy ra $\vec{AQ} = \vec{BD} + \vec{DB} = \vec{0}$

§3 TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa:** Tích của vector $\vec{a}$ với số thực $k \neq 0$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$

2. Tính chất:

i) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ ii) $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$

iii) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ iv) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$

v) $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

3. Điều kiện để hai vector cùng phương

- $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k thỏa $\vec{b} = k\vec{a}$
- Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overline{AB} = k\overline{AC}$

4. Phân tích một vector theo hai vector không cùng phương.

Cho $\vec{a}$ không cùng phương $\vec{b}$. Với mọi vector $\vec{x}$ luôn được biểu diễn $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số thực duy nhất.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: Dựng và tính độ dài vector chứa tích một vector với một số.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Sử dụng định nghĩa tích của một vector với một số và các quy tắc về phép toán vector để dựng vector chứa tích một vector với một số, kết hợp với các định lý Pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a . điểm M là trung điểm BC. Dựng các vector sau và tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overline{CB} + \overline{MA}$

b) $\overline{BA} - \frac{1}{2}\overline{BC}$

c) $\frac{1}{2}\overline{AB} + 2\overline{AC}$

c) $\frac{3}{4}\overline{MA} - 2,5\overline{MB}$

Lời giải (Hình 1.14)

) Do $\frac{1}{2}\overline{CB} = \overline{CM}$ suy ra theo quy tắc ba điểm ta có

$$\frac{1}{2}\overline{CB} + \overline{MA} = \overline{CM} + \overline{MA} = \overline{CA}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{1}{2}\overline{CB} + \overline{MA} \right| = CA = a$$

- b) Vì $\frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta

$$\text{có } \overline{BA} - \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BA} - \overline{BM} = \overline{MA}$$

Theo định lý Pitago ta có

$$\begin{aligned} MA &= \sqrt{AB^2 - BM^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left| \overline{BA} - \frac{1}{2}\overline{BC} \right| = MA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

- c) Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành AQPN.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AN}$, $2\overline{AC} = \overline{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta

$$\text{có } \frac{1}{2}\overline{AB} + 2\overline{AC} = \overline{AN} + \overline{AQ} = \overline{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A lên PN

$$\text{Vì } MN \parallel AC \Rightarrow \widehat{ANL} = \widehat{MNB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$$

Xét tam giác vuông ANL ta có

$$\sin \widehat{ANL} = \frac{AL}{AN} \Rightarrow AL = AN \cdot \sin \widehat{ANL} = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \widehat{ANL} = \frac{NL}{AN} \Rightarrow NL = AN \cdot \cos \widehat{ANL} = \frac{a}{2} \cos 60^\circ = \frac{a}{4}$$

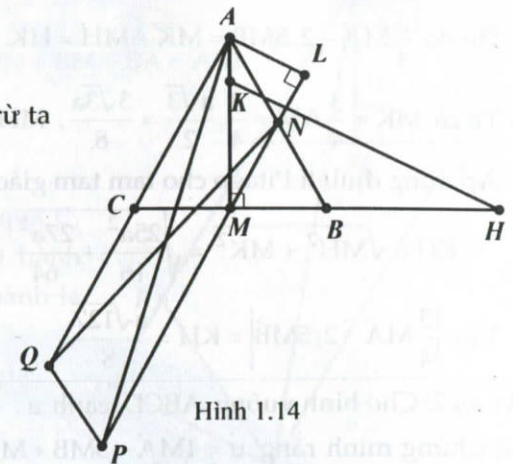
$$\text{Ta lại có } AQ = PN \Rightarrow PL = PN + NL = AQ + NL = 2a + \frac{a}{4} = \frac{9a}{4}$$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác ALP ta có

$$AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{1}{2}\overline{AB} + 2\overline{AC} \right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

- d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK = \frac{3}{4}MA$, H thuộc tia MB sao cho $MH = 2,5MB$.



Hình 1.14

Khi đó $\frac{3}{4}\overline{MA} = \overline{MK}$, $2,5\overline{MB} = \overline{MH}$

Do đó $\frac{3}{4}\overline{MA} - 2,5\overline{MB} = \overline{MK} - \overline{MH} = \overline{HK}$

Ta có $MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a}{8}$, $MH = 2,5MB = 2,5 \cdot \frac{a}{2} = \frac{5a}{4}$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông KMH ta có

$$KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{16} + \frac{27a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Vậy $\left| \frac{3}{4}\overline{MA} - 2,5\overline{MB} \right| = KH = \frac{a\sqrt{127}}{8}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD cạnh a.

a) Chứng minh rằng $\vec{u} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vector $\vec{u}$.

Lời giải (Hình 1.15)

a) Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 4(\vec{MO} + \vec{OA}) - 3(\vec{MO} + \vec{OB}) + (\vec{MO} + \vec{OC}) - 2(\vec{MO} + \vec{OD}) \\ &= 4\vec{OA} - 3\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OD}\end{aligned}$$

Mà $\vec{OD} = -\vec{OB}$, $\vec{OC} = -\vec{OA}$ nên $\vec{u} = 3\vec{OA} - \vec{OB}$

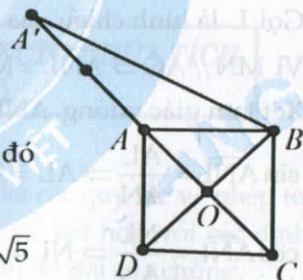
Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Lấy điểm A' trên tia OA sao cho $OA' = 3OA$ khi đó

$$\vec{OA'} = 3\vec{OA} \text{ do đó } \vec{u} = \vec{OA'} - \vec{OB} = \vec{BA'}$$

Mặt khác $BA' = \sqrt{OB^2 + OA'^2} = \sqrt{OB^2 + 9OA^2} = a\sqrt{5}$

Suy ra $|\vec{u}| = a\sqrt{5}$



Hình 1.15

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.25. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi điểm M, N lần lượt là trung điểm BC, CA. Dựng các vector sau và tính độ dài của chúng.

- a) $\overline{AN} + \frac{1}{2}\overline{CB}$ b) $\frac{1}{2}\overline{BC} - 2\overline{MN}$ c) $\overline{AB} + 2\overline{AC}$ d) $0,25\overline{MA} - \frac{3}{2}\overline{MB}$

Hướng dẫn giải

a) Theo quy tắc ba điểm ta có: $\overline{AN} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \overline{NC} + \overline{CM} = \overline{NM}$

Suy ra $\left| \overline{AN} + \frac{1}{2}\overline{CB} \right| = MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

b) Theo quy tắc trừ ta có $\frac{1}{2}\overline{BC} - 2\overline{MN} = \overline{BM} - \overline{BA} = \overline{AM}$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}\overline{BC} - 2\overline{MN} \right| = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua C, điểm E là đỉnh của hình bình hành ABEF, theo quy tắc hình bình hành ta có $\overline{AB} + 2\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AF} = \overline{AE}$

Gọi I là hình chiếu của E lên AC.

Vì $AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{IFE} = \widehat{CAB} = 60^\circ$

$$\sin \widehat{IFE} = \frac{IE}{EF} \Rightarrow IE = EF \cdot \sin \widehat{IFE} = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{IFE} = \frac{IF}{EF} \Rightarrow IF = EF \cdot \cos \widehat{IFE} = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

Áp dụng định lý Pitago ta có

$$AE = \sqrt{AI^2 + IE^2} = \sqrt{\left(2a + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{28}}{2}$$

Suy ra $\left| \overline{AB} + 2\overline{AC} \right| = AE = \frac{a\sqrt{28}}{2}$

d) Lấy các điểm H, K sao cho $0,25\overline{MA} = \overline{MH}$; $\frac{3}{2}\overline{MB} = \overline{MK}$

Suy ra $0,25\overline{MA} - \frac{3}{2}\overline{MB} = \overline{MH} - \overline{MK} = \overline{KH}$

$$\text{Do đó } \left| 0,25\overline{MA} - \frac{3}{2}\overline{MB} \right| = KH = \sqrt{\left(\frac{AM}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}MB\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{8}$$

Bài 1.26: Cho hình vuông ABCD cạnh a.

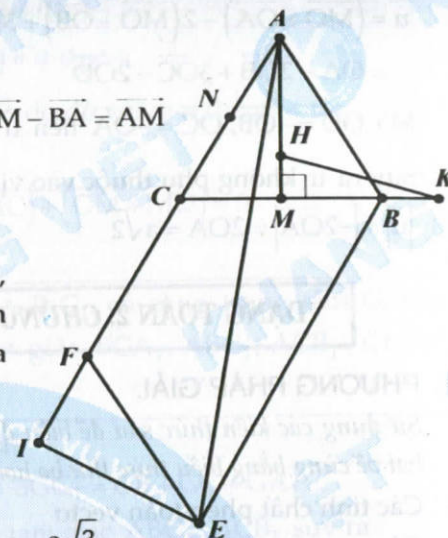
a) Chứng minh rằng $\vec{u} = \vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - 2\vec{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vector $\vec{u}$

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có



$$\begin{aligned}\vec{u} &= (\vec{MO} + \vec{OA}) - 2(\vec{MO} + \vec{OB}) + 3(\vec{MO} + \vec{OC}) - 2(\vec{MO} + \vec{OD}) \\ &= \vec{OA} - 2\vec{OB} + 3\vec{OC} - 2\vec{OD}\end{aligned}$$

Mà $\vec{OD} = -\vec{OB}$, $\vec{OC} = -\vec{OA}$ nên $\vec{u} = -2\vec{OA}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) $|\vec{u}| = |-2\vec{OA}| = 2OA = a\sqrt{2}$

DẠNG TOÁN 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTO.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

- Các tính chất phép toán vectơ
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$ (Với O là điểm tùy ý)

- Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ (Với O là điểm tùy ý)

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ. Chứng minh rằng:

a) $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{IJ}$

b) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

c) $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$ với M là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.16)

- a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IJ} + \vec{JC}$$

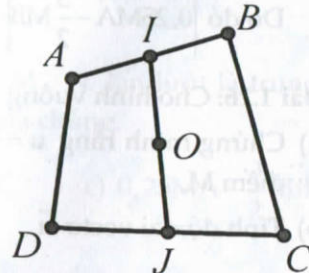
Tương tự $\vec{BD} = \vec{BI} + \vec{IJ} + \vec{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD

nên $\vec{AI} + \vec{BI} = \vec{0}$, $\vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$

Vậy $\vec{AC} + \vec{BD} = (\vec{AI} + \vec{BI}) + (\vec{JC} + \vec{JD}) + 2\vec{IJ} = 2\vec{IJ}$ đpcm

- b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OI}$, $\vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OJ}$



Hình 1.16

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\vec{OI} + \vec{OJ} = \vec{0}$

Suy ra $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2(\vec{OI} + \vec{OJ}) = \vec{0}$ đpcm

- c) Theo câu b ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{OM} + \vec{MA}) + (\vec{OM} + \vec{MB}) + (\vec{OM} + \vec{MC}) + (\vec{OM} + \vec{MD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1 . Chứng minh rằng $\vec{GG_1} + \vec{GG_2} + \vec{GG_3} = \vec{0}$.

Lời giải

Vì G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1 nên $3\vec{GG_1} = \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GA_1}$

Tương tự G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC_1, ACB_1 suy ra

$$3\vec{GG_2} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC_1} \text{ và } 3\vec{GG_3} = \vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GB_1}$$

Cộng theo vế với vế các đẳng thức trên ta có

$$3(\vec{GG_1} + \vec{GG_2} + \vec{GG_3}) = 2(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + (\vec{GA_1} + \vec{GB_1} + \vec{GC_1})$$

Mặt khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ và } \vec{GA_1} + \vec{GB_1} + \vec{GC_1} = \vec{0}$$

Suy ra $\vec{GG_1} + \vec{GG_2} + \vec{GG_3} = \vec{0}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng:

a) $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$

b) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$

c) $\vec{GH} + 2\vec{GO} = \vec{0}$

Lời giải (Hình 1.17)

- a) Dễ thấy $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$ nếu tam giác ABC vuông

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra BDCH là hình bình hành,

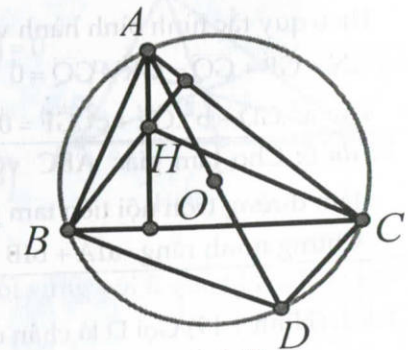
do đó theo quy tắc hình bình hành thì

$$\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{HD} \quad (1)$$

Mặt khác vì O là trung điểm của AD

$$\text{nên } \vec{HA} + \vec{HD} = 2\vec{HO} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$



Hình 1.17

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \text{ đpcm}$$

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

$$\text{Mặt khác theo câu b) ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH}) - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và có trọng tâm G.

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu G lên cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng $a^2 \cdot \overrightarrow{GD} + b^2 \cdot \overrightarrow{GE} + c^2 \cdot \overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

Lời giải (hình 1.18)

Trên tia GD, GE, MF lần lượt lấy các điểm N, P, Q sao cho $GN = a$, $GP = b$, $GQ = c$ và dựng hình bình hành GPRN

$$\text{Ta có } a^2 \cdot \overrightarrow{GD} + b^2 \cdot \overrightarrow{GE} + c^2 \cdot \overrightarrow{GF} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GN} + b \cdot \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GP} + c \cdot \overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GQ} = \vec{0} \quad (*)$$

Ta có $a \cdot \overrightarrow{GD} = 2S_{\Delta GBC}$, $b \cdot \overrightarrow{GE} = 2S_{\Delta GCA}$, $c \cdot \overrightarrow{GF} = 2S_{\Delta GAB}$, mặt khác G là trọng tâm tam giác ABC nên $S_{\Delta GBC} = S_{\Delta GCA} = S_{\Delta GAB}$ suy ra $a \cdot \overrightarrow{GD} = b \cdot \overrightarrow{GE} = c \cdot \overrightarrow{GF}$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

$$\text{Ta có } AC = GP = b, PR = BC = a$$

$$\text{và } \widehat{ACB} = \widehat{GPR} \text{ (góc có cặp cạnh vuông góc với nhau)}$$

$$\text{Suy ra } \Delta ACB = \Delta GPR \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow GR = AB = c \text{ và } \widehat{PGR} = \widehat{BAC}$$

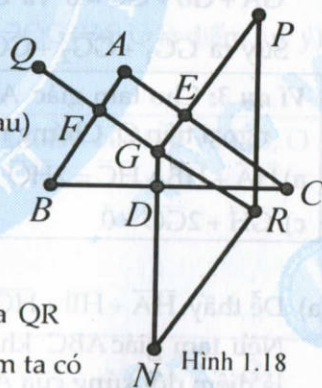
$$\text{Ta có } \widehat{QGP} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{QGP} + \widehat{GPR} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow Q, G, R \text{ thẳng hàng do đó G là trung điểm của QR}$$

Theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có

$$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

$$\text{Vậy } a^2 \cdot \overrightarrow{GD} + b^2 \cdot \overrightarrow{GE} + c^2 \cdot \overrightarrow{GF} = \vec{0}.$$



Hình 1.18

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

Cách 1: (Hình 1.19) Gọi D là chân đường phân giác góc A

Do D là chân đường phân giác góc A nên ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{c}{b} \overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB} = \frac{c}{b} (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}) \Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{ID} = b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} \quad (1)$$

Do I là chân đường phân giác nên ta có:

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD+CD}{BA+CA} = \frac{a}{b+c}$$

$$\Rightarrow (b+c)\overrightarrow{ID} = -a\overrightarrow{IA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

Cách 2: (hình 1.20) Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tại B'; song song với BI cắt AI tại A'

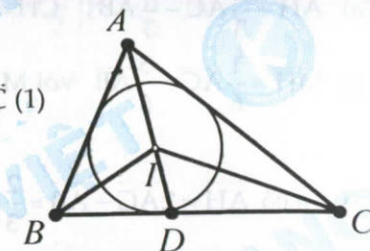
$$\text{Ta có } \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} \quad (*)$$

Theo định lý Talet và tính chất đường phân giác trong ta có:

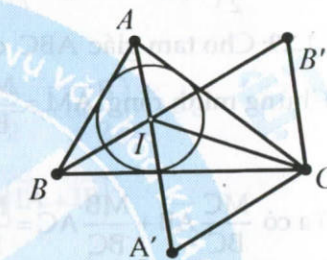
$$\frac{IB}{IB'} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IB'} = -\frac{b}{c} \overrightarrow{IB} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{IA'} = -\frac{a}{c} \overrightarrow{IA} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) thay vào } (*) \text{ ta có: } \overrightarrow{IC} = -\frac{a}{c} \overrightarrow{IA} - \frac{b}{c} \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$



Hình 1.19



Hình 1.20

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.27: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$$a) \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

$$b) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \text{ với O là điểm bất kỳ.}$$

Hướng dẫn giải

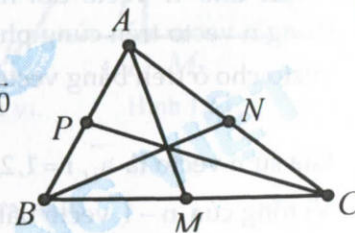
$$a) \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$$

$$b) \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$



Hình 1.49

Bài 1.28: Cho tam giác ABC. Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng

$$a) \overline{AH} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}, \quad \overline{CH} = -\frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AC}$$

$$b) \overline{MH} = \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{5}{6}\overline{AB} \text{ với } M \text{ là trung điểm của } BC$$

Hướng dẫn giải

$$a) \text{ Ta có } \overline{AH} = 2\overline{AG} - \overline{AB} = \frac{2}{3}(\overline{AC} + \overline{AB}) - \overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$$

$$\overline{CH} = \overline{AH} - \overline{AC} = -\frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AC}$$

$$b) \overline{MH} = \frac{1}{2}(\overline{AH} - \overline{AB} + \overline{CH}) = \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{5}{6}\overline{AB}$$

Bài 1.29: Cho tam giác ABC có điểm M thuộc cạnh BC.

$$\text{Chứng minh rằng } \overline{AM} = \frac{MC}{BC}\overline{AB} + \frac{MB}{BC}\overline{AC}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{MC}{BC}\overline{AB} + \frac{MB}{BC}\overline{AC} &= \frac{MC}{BC}(\overline{AM} + \overline{MB}) + \frac{MB}{BC}(\overline{AM} + \overline{MC}) \\ &= \overline{AM} + \frac{MC}{BC}\overline{MB} + \frac{MB}{BC}\overline{MC} = \overline{AM} \end{aligned}$$

Bài 1.30: Cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\overline{B'B} + \overline{CC'} + \overline{D'D} = \vec{0}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \overline{B'B} + \overline{CC'} + \overline{D'D} &= (\overline{AB} - \overline{AB'}) + (\overline{AC'} - \overline{AC}) + (\overline{AD} - \overline{AD'}) \\ &= (\overline{AB} + \overline{AD}) - \overline{AC} - (\overline{AB'} + \overline{AD'}) + \overline{AC} = \vec{0} \end{aligned}$$

Bài 1.31: Cho n vector đôi một khác phương và tổng của n-1 vector bất kì trong n vector trên cùng phương với vector còn lại. Chứng minh rằng tổng n vector cho ở trên bằng vector $\vec{0}$

Hướng dẫn giải

Giả sử n vector là $\vec{a}_i, i = 1, 2, \dots, n$. Đặt $\vec{u} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$

Vì tổng của n-1 vector bất kì trong n vector trên cùng phương với vector còn lại do đó $\vec{u}$ cùng phương với hai vector $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ nên $\vec{u} = \vec{0}$.

Bài 1.32: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$. Gọi I là tâm và D, E, F lần lượt là tiếp điểm của cạnh BC, CA, AB của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$a) \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \overline{IA} + \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \overline{IB} + \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \overline{IC} = \vec{0}$$

$$b) \cot \frac{A}{2} \overline{IM} + \cot \frac{B}{2} \overline{IN} + \cot \frac{C}{2} \overline{IP} = \vec{0}$$

$$c) (b+c-a)\overline{IM} + (a+c-b)\overline{IN} + (a+b-c)\overline{IP} = \vec{0}$$

$$d) a\overline{AD} + b\overline{BE} + c\overline{CF} = \vec{0}$$

Hướng dẫn giải

a) Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta có

$$a = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right); \quad b = r \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right); \quad c = r \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right)$$

Theo ví dụ 5 ta có $a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \overline{IA} + \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \overline{IB} + \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \overline{IC} = \vec{0}$$

$$b) \text{ Ta có } \overline{IM} = \frac{1}{2}(\overline{IB} + \overline{IC}); \quad \overline{IN} = \frac{1}{2}(\overline{IC} + \overline{IA}); \quad \overline{IP} = \frac{1}{2}(\overline{IA} + \overline{IB})$$

$$\text{Theo câu a) ta có } \cot \frac{A}{2}(\overline{IB} + \overline{IC}) + \cot \frac{B}{2}(\overline{IA} + \overline{IC}) + \cot \frac{C}{2}(\overline{IA} + \overline{IB}) = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \cot \frac{A}{2} \overline{IM} + \cot \frac{B}{2} \overline{IN} + \cot \frac{C}{2} \overline{IP} = \vec{0}$$

c) Ta có

$$\overline{IA} = \overline{IP} + \overline{IN} - \overline{IM}; \quad \overline{IB} = \overline{IM} + \overline{IP} - \overline{IN}; \quad \overline{IC} = \overline{IM} + \overline{IN} - \overline{IP}$$

Kết hợp ví dụ 5 suy ra

$$a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)\overline{IM} + (a+c-b)\overline{IN} + (a+b-c)\overline{IP} = \vec{0}$$

$$d) \overline{ID} = \frac{DC}{BC}\overline{IB} + \frac{DB}{BC}\overline{IC} = \frac{(p-c)}{a}\overline{IB} + \frac{(p-b)}{a}\overline{IC}$$

$$\Leftrightarrow a\overline{ID} = (p-c)\overline{IB} + (p-b)\overline{IC} \text{ với } p \text{ là nửa chu vi.}$$

Hình 1.51

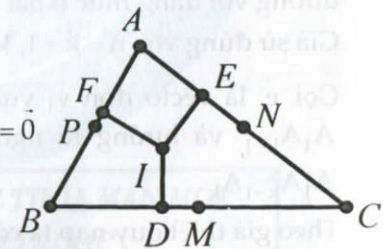
Tương tự ta có:

$$b\overline{IE} = (p-a)\overline{IC} + (p-c)\overline{IA}; \quad c\overline{IF} = (p-b)\overline{IA} + (p-a)\overline{IB}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a\overline{ID} + b\overline{IE} + c\overline{IF} &= (2p-b-c)\overline{IA} + (2p-c-a)\overline{IB} + (2p-a-b)\overline{IC} \\ &= a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} \Rightarrow a\overline{AD} + b\overline{BE} + c\overline{CF} = \vec{0} \end{aligned}$$

Bài 1.33: Cho tam giác ABC. M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác.

$$\text{Chứng minh rằng: } S_{MBC} \overline{MA} + S_{MCA} \overline{MB} + S_{MAB} \overline{MC} = \vec{0}$$



Hướng dẫn giải

Gọi A' là giao điểm AM với BC ta có $\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$ (*)

$$\text{Mặt khác: } \frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} \Rightarrow \frac{A'C}{A'B} + 1 = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{A'B}{BC} = \frac{S_{MAB}}{S_{MAB} + S_{MAC}}$$

$$\text{Và } \frac{A'C}{BC} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB} + S_{MAC}} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{MA'} = -\frac{MA'}{MA}\overrightarrow{MA} = -\frac{S_{MBC}}{S_{MAB} + S_{MAC}}\overrightarrow{MA} \quad (2)$$

Thay (1) và (2) vào (*) ta được điều phải chứng minh.

Bài 1.34: Cho đa giác lồi $A_1A_2\dots A_n$ ($n \geq 3$); $\vec{e}_i, 1 \leq i \leq n$ là vector đơn vị vuông góc với A_iA_{i+1} (xem $A_{n+1} \equiv A_1$) và hướng ra phía ngoài đa giác.

Chứng minh rằng: $A_1A_2\vec{e}_1 + A_2A_3\vec{e}_2 + \dots + A_nA_1\vec{e}_n = \vec{0}$ (định lý con nhím)

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng quy nạp

Với $n = 3$ đẳng thức trở thành

$$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \vec{0}$$

(đúng vì đẳng thức này tương đương với đẳng thức ở bài 11)

Giả sử đúng với $n = k - 1, k \geq 4$

Gọi $\vec{e}$ là vector đơn vị vuông góc với A_1A_{k-1} và hướng ra ngoài tam giác $A_1A_{k-1}A_k$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$A_1A_2\vec{e}_1 + A_2A_3\vec{e}_2 + \dots + A_{k-2}A_{k-1}\vec{e}_{k-2} + A_{k-1}A_1(-\vec{e}) = \vec{0} \quad (1)$$

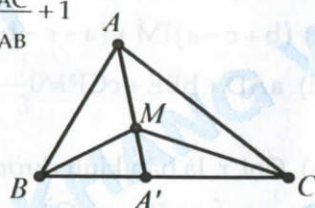
Mặt khác xét tam giác $A_1A_{k-1}A_k$ ta có

$$A_1A_{k-1}\vec{e} + A_{k-1}A_k\vec{e}_{k-1} + A_kA_1\vec{e}_k = \vec{0} \quad (2)$$

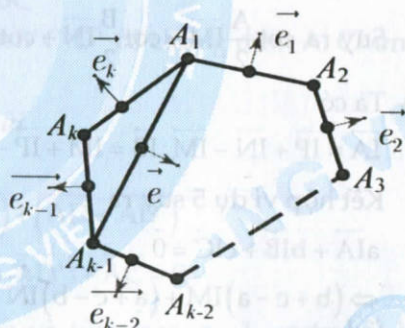
Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 1.35: Cho đa giác lồi $A_1A_2\dots A_n$ ($n \geq 3$) với I là tâm đường tròn tiếp xúc các cạnh của đa giác; gọi $\vec{e}_i, 1 \leq i \leq n$ là véc tơ đơn vị cùng hướng với véc tơ

$$\overrightarrow{IA_i}. \text{ Chứng minh rằng } \cos \frac{A_1}{2}\vec{e}_1 + \cos \frac{A_2}{2}\vec{e}_2 + \dots + \cos \frac{A_n}{2}\vec{e}_n = \vec{0}.$$



Hình 1.52



Hình 1.53

Hướng dẫn giải

Gọi $B_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các tiếp điểm đường tròn nội tiếp với cạnh A_iA_{i+1}

Xét tứ giác $A_1B_1B_nI$ có $\widehat{A_1B_nI} = \widehat{A_1B_1I} = 90^\circ$ và $\widehat{B_nA_1I} = \widehat{B_1A_1I}$

Suy ra $\widehat{B_nIA_1} = \widehat{B_1IA_1}$.

Mặt khác $IB_1 = IB_n$ do đó $IA_1 \perp B_1B_n$

Tương tự ta có $IA_i \perp B_{i-1}B_i, i = 2, 3, \dots, n$

Xét đa giác lồi $B_1B_2\dots B_n$ theo định lý con nhím ta có

$$B_nB_1\vec{e}_1 + B_1B_2\vec{e}_2 + \dots + B_{n-1}B_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow IB_1 \cdot \cos \frac{A_1}{2}\vec{e}_1 + IB_2 \cdot \cos \frac{A_2}{2}\vec{e}_2 + \dots + IB_n \cdot \cos \frac{A_n}{2}\vec{e}_n = \vec{0} \quad \text{Hình 1.54}$$

Mà $IB_1 = IB_2 = \dots = IB_n$ suy ra đpcm.

Bài 1.36: Cho tam giác ABC vuông tại A . I là trung điểm của đường cao AH .

Chứng minh rằng: $a^2\vec{IA} + b^2\vec{IB} + c^2\vec{IC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{HB}{HC} = \frac{HB \cdot BC}{HC \cdot BC} = \frac{c^2}{b^2},$$

$$\text{Suy ra } \vec{IH} = \frac{b^2}{c^2 + b^2}\vec{IB} + \frac{c^2}{c^2 + b^2}\vec{IC}$$

$$\text{Mà } b^2 + c^2 = a^2 \text{ và } \vec{IH} = -\vec{IA} \text{ nên suy ra } -\vec{IA} = \frac{b^2}{a^2}\vec{IB} + \frac{c^2}{a^2}\vec{IC}$$

$$\text{Hay } a^2\vec{IA} + b^2\vec{IB} + c^2\vec{IC} = \vec{0}.$$

DẠNG TOÁN 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM M THỎA MÃN MỘT ĐẲNG THỨC VECTO CHO TRƯỚC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Ta biến đổi đẳng thức vector về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một vector bằng vector $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn vector này chính là điểm M .
- Ta biến đổi về đẳng thức vector đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.21)

Ta có $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$

M nằm trên tia AB và $AM = 3AB$



Hình 1.21

Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD. Xác định điểm M, N, P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

c) $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.22)

a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\text{Do đó } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}$$

Suy ra M là trung điểm AI

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK} + 2\overrightarrow{NH} = \vec{0}$$

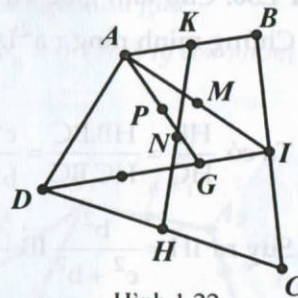
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NH} = \vec{0} \Leftrightarrow N \text{ là trung điểm của } KH$$

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD khi đó ta có

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{PG}$$

$$\text{Suy ra } 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} = \vec{0} \Leftrightarrow P \text{ là trung điểm } AG.$$



Hình 1.22

Ví dụ 3: Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$.

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Từ đó, suy ra với điểm bất kì M thì $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA} + \beta(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{AI} = \beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}.$$

Vì A, B cố định nên vector $\frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm

I thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Từ đó suy ra } \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$

$$= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} + (\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI} \quad \text{đpcm.}$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.37: Xác định các điểm I, J, K, L biết

a) $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

d) $2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Hướng dẫn giải

a) I là điểm đối xứng của A qua B.

b) $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Bài 1.38: Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm cố định I và hằng số k để hệ thức sau thỏa mãn với mọi M

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI}$

b) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MI}$

c) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MI}$

Hướng dẫn giải

a) Cho $M \equiv I \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \Rightarrow k = 4$$

b) $k = 4, \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$

c) $k = 2, \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD}$

Bài 1.39: Cho tam giác ABC và ba số thực α, β, γ không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng:

a) Nếu $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

b) Nếu $\alpha + \beta + \gamma = 0$ thì không tồn tại điểm N sao cho $\alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NB} + \gamma\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

a) Vì $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \Rightarrow (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) \neq 0$

$$\text{Không mất tính tổng quát giả sử } \alpha + \beta \neq 0 \Rightarrow \exists ! D : \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{MD} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Do đó tồn tại duy nhất điểm M

b) Giả sử tồn tại điểm N và $\alpha \neq 0$

$$\text{Ta có } \alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NB} + \gamma\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB} \text{ (mâu thuẫn với } ABC \text{ là tam giác)}$$

Bài 1.40: Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và n số $k_1, k_2, \dots, k_n$ mà

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \neq 0$$

a) Chứng minh rằng có duy nhất điểm G sao cho

$$k_1 \overrightarrow{GA_1} + k_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Điểm G như thế gọi là *tâm tỉ cự* của hệ điểm A_i gắn với hệ số k_i . Trong trường hợp các hệ số k_i bằng nhau (ta có thể chọn các k_i đều bằng 1) thì G gọi là *trọng tâm* của hệ điểm A_i .

b) Chứng minh rằng nếu G là tâm tỉ cự nói ở câu a) thì với điểm M bất kỳ ta có

$$\frac{1}{k} (k_1 \overrightarrow{MA_1} + k_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{MA_n}) = \overrightarrow{OG}$$

Hướng dẫn giải

O là điểm tùy ý, ta có:

$$k_1 \overrightarrow{GA_1} + k_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow k_1 (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}) + k_2 (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}) + \dots + k_n (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{k} (k_1 \overrightarrow{OA_1} + k_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{OA_n})$$

Suy ra G xác định duy nhất.

DẠNG TOÁN 4: PHÂN TÍCH MỘT VECTO THEO HAI VECTO KHÔNG CÙNG PHƯƠNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Sử dụng các tính chất phép toán vector, ba quy tắc phép toán vector và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

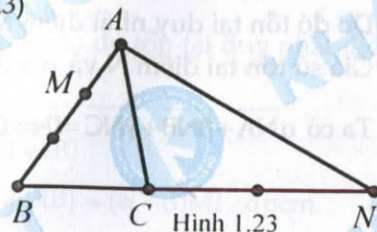
c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{CM}$. Chứng minh I, A, N thẳng hàng.

Lời giải (hình 1.23)

a) Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia

BC và $CN = 2BC$.



Hình 1.23

b) Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \vec{a} - \vec{b}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3} \vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3} \vec{a} + 3\vec{b}.$$

c) Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{3} (-2\vec{a} + 3\vec{b})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AN} \Rightarrow A, I, N \text{ thẳng hàng.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC .

a) Phân tích các vector $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các vector $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải (hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7} \overrightarrow{AM}$

$$\text{suy ra } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7} \overrightarrow{AM}$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7} \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \right) = -\frac{23}{28} \overrightarrow{AB} + \frac{15}{28} \overrightarrow{AC}$$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra

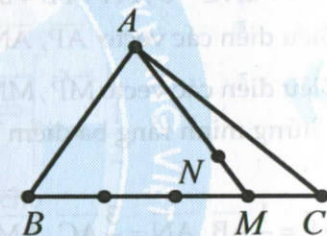
$$\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7} \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7} \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= -\frac{1}{14} (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14} (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})$$

$$= -\frac{1}{14} (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14} (-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA})$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{GA} + \frac{1}{7} \overrightarrow{GB}$$



Hình 1.24

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB . Phân tích các vector $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải (hình 1.25)

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overline{AN} &= \overline{AC} + \overline{CN} = \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} \\ \overline{MN} &= \overline{MA} + \overline{AN} = -\frac{1}{3}\overline{AB} + \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} \\ &= -\frac{5}{6}\overline{AB} + \overline{AC}\end{aligned}$$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên

$$3\overline{AG} = \overline{AM} + \overline{AN} + \overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \left(\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}\right) + \overline{AB} = \frac{5}{6}\overline{AB} + \overline{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overline{AG} = \frac{5}{18}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.41: Cho tam giác ABC. Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overline{MB} = 3\overline{MC}$, $\overline{NA} + 2\overline{NC} = \vec{0}$, $\overline{PA} + \overline{PB} = \vec{0}$

a) Biểu diễn các vectơ $\overline{AP}$, $\overline{AN}$, $\overline{AM}$ theo các vectơ $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$

b) Biểu diễn các vectơ $\overline{MP}$, $\overline{MN}$ theo các vectơ $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$

Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng?

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}, \overline{AN} = \frac{3}{2}\overline{AC}, \overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$$

$$\text{b) } \overline{MP} = \overline{AP} - \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{3}{2}\overline{AC}, \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{3}{4}\overline{AC}$$

$$\overline{MP} = 2\overline{MN} \Rightarrow M, N, P \text{ thẳng hàng}$$

Bài 1.42: Cho tam giác ABC. Gọi I, J là hai điểm xác định bởi

$$\overline{IA} = 2\overline{IB}, 3\overline{JA} + 2\overline{JC} = \vec{0}$$

a) Tính $\overline{IJ}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$.

b) Chứng minh đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

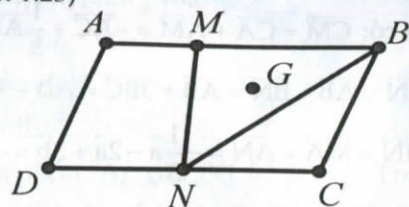
Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \overline{IJ} = -2\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC}$$

$$\text{b) } \overline{IG} = -\frac{5}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC} \Rightarrow 5\overline{IJ} = 6\overline{IG} \text{ suy ra IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.}$$

Bài 1.43. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.

a) Hãy phân tích $\overline{AI}$, $\overline{AJ}$ theo $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$.



Hình 1.25

b) Hãy phân tích $\overline{AG}$ theo $\overline{AI}$ và $\overline{AJ}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có: } 2\overline{IC} = -3\overline{IB} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{3}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC}.$$

$$5\overline{JB} = 2\overline{JC} \Leftrightarrow 5(\overline{AB} - \overline{AJ}) = 2(\overline{AC} - \overline{AJ}) \Leftrightarrow \overline{AJ} = \frac{5}{3}\overline{AB} - \frac{2}{3}\overline{AC}$$

b) Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC}) \Rightarrow \overline{AG} = \frac{35}{48}\overline{AI} - \frac{1}{16}\overline{AJ}.$$

Bài 1.44: Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Tìm x sao cho

a) $\vec{u} = \vec{a} + (2x-1)\vec{b}$ và $\vec{v} = x\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương

b) $\vec{u} = 3\vec{a} + x\vec{b}$ và $\vec{u} = (1-x)\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ cùng hướng

Hướng dẫn giải

a) $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v} \Leftrightarrow$ có số thực k sao cho

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} + (2x-1)\vec{b} = k(x\vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} kx = 1 \\ k = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v} \Leftrightarrow$ có số thực k dương sao cho

$$\vec{u} = k\vec{v} \Rightarrow 3\vec{a} + x\vec{b} = k\left((1-x)\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3 = k(1-x) \\ x = -\frac{2}{3}k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = -3(1) \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

DẠNG TOÁN 5: CHỨNG MINH HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI TAM GIÁC CÙNG TRỌNG TÂM

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh $\overline{A_1A_2} = \vec{0}$.

Cách 2: Chứng minh $\overline{OA_1} = \overline{OA_2}$ với O là điểm tùy ý.

- Để chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ cùng trọng tâm ta làm như sau:

Cách 1: Chứng minh G là trọng tâm ΔABC trùng với G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Cách 2: Gọi G là trọng tâm ΔABC (tức ta có $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$) ta đi chứng minh $\overline{GA'} + \overline{GB'} + \overline{GC'} = \vec{0}$.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\overline{AB} = \overline{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overline{AI} = \overline{ID}$, $\overline{CJ} = \overline{JB}$

Do đó $\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AI} + \overline{IJ} + \overline{JB} = \overline{CJ} + \overline{JI} + \overline{ID}$

$\Leftrightarrow \overline{IJ} = \overline{JI} \Leftrightarrow \overline{IJ} = \overline{0}$ hay I trùng với J

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử $\frac{AM}{AB} = k$ suy ra $\overline{AM} = k\overline{AB}$; $\overline{BN} = k\overline{BC}$; $\overline{CP} = k\overline{CA}$

Cách 1: Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm ΔABC và ΔMNP

Suy ra $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}$ và $\overline{G'M} + \overline{G'N} + \overline{G'P} = \overline{0}$ (*)

Ta có $\overline{AM} = k\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AG} + \overline{GG'} + \overline{G'M} = k\overline{AB}$

Tương tự $\overline{BG} + \overline{GG'} + \overline{G'N} = k\overline{BC}$

Và $\overline{CG} + \overline{GG'} + \overline{G'P} = k\overline{CA}$

Cộng vế với vế từng đẳng thức trên ta được

$$(\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}) + 3\overline{GG'} + (\overline{G'M} + \overline{G'N} + \overline{G'P}) = k(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$$

Kết hợp với (*) ta được $\overline{GG'} = \overline{0}$

Suy ra điều phải chứng minh

Cách 2: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \overline{0}$

Ta có: $\overline{GM} + \overline{GN} + \overline{GP} = \overline{GA} + \overline{AM} + \overline{GB} + \overline{BN} + \overline{GC} + \overline{CP}$

$$= \overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = k\overline{AB} + k\overline{BC} + k\overline{CA} = k(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \overline{0}$$

Vậy hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Ví dụ 3: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.26)

Gọi G là trọng tâm của ΔMPR suy ra $\overline{GM} + \overline{GP} + \overline{GR} = \overline{0}$ (*)

Mặt khác $2\overline{GM} = \overline{GA} + \overline{GB}$, $2\overline{GP} = \overline{GC} + \overline{GD}$, $2\overline{GR} = \overline{GE} + \overline{GF}$.

$$\Rightarrow 2(\overline{GM} + \overline{GP} + \overline{GR}) = \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF}$$

Kết hợp với (*) ta được

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} + \overline{GE} + \overline{GF} = \overline{0}$$

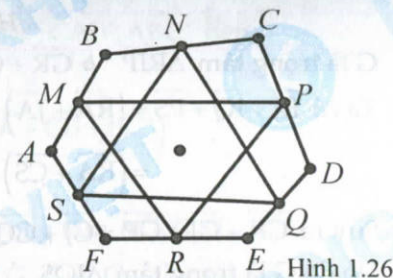
$$\Leftrightarrow (\overline{GA} + \overline{GF}) + (\overline{GB} + \overline{GC}) + (\overline{GD} + \overline{GE}) = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{GS} + 2\overline{GN} + 2\overline{GQ} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{GS} + \overline{GN} + \overline{GQ} = \overline{0}$$

Suy ra G là trọng tâm của ΔSNQ .

Vậy ΔMPR và ΔSNQ có cùng trọng tâm.



Hình 1.26

Ví dụ 4: Cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác BC'D và B'CD' có cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.27)

Gọi G là trọng tâm tam giác BC'D

suy ra $\overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \overline{0}$

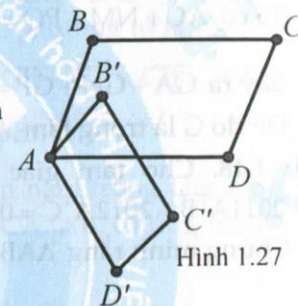
$$\Leftrightarrow \overline{GB'} + \overline{GC} + \overline{GD'} + \overline{B'B} + \overline{CC'} + \overline{D'D} = \overline{0} \quad (1)$$

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có

$$\begin{aligned} \overline{B'B} + \overline{CC'} + \overline{D'D} &= (\overline{AB} - \overline{AB'}) + (\overline{AC'} - \overline{AC}) + (\overline{AD} - \overline{AD'}) \\ &= (\overline{AB} + \overline{AD}) - \overline{AC} - (\overline{AB'} + \overline{AD'}) + \overline{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \overline{AC} - \overline{AC} - \overline{AC'} + \overline{AC} = \overline{0} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $\overline{GB'} + \overline{GC} + \overline{GD'} = \overline{0}$ hay G là trọng tâm tam giác B'CD'



Hình 1.27

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.45. Cho các tam giác ABC, A'B'C' có G, G' lần lượt là trọng tâm. Chứng minh rằng: $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 3\overline{GG'}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} =$

$$\begin{aligned} &= (\overline{AG} + \overline{GG'} + \overline{G'A'}) + (\overline{BG} + \overline{GG'} + \overline{G'B'}) + (\overline{CG} + \overline{GG'} + \overline{G'C'}) \\ &= 3\overline{GG'} + (\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}) + (\overline{G'A'} + \overline{G'B'} + \overline{G'C'}) = 3\overline{GG'} \end{aligned}$$

Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm là

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \overline{0}$$

Bài 1.46. Cho tam giác ABC, vẽ các hình bình hành ABIJ, BCPQ, CARS.

Chứng minh rằng ΔRIP , ΔJQS có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải

G là trọng tâm $\Delta RIP \Rightarrow \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{JA}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}) \\ &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PC}) = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} \Rightarrow \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}$$

Do đó G là trọng tâm ΔJQS .

Bài 1.47. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải

G là trọng tâm $\Delta ANP \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} \Rightarrow \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

Do đó G là trọng tâm ΔCMQ .

Bài 1.48. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C} + 2012\overrightarrow{B'A} = \vec{0}$, $2011\overrightarrow{C'A} + 2012\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ΔABC và $\Delta A'B'C'$ cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải

G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } 2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2011(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) + 2012(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4023\overrightarrow{A'A} + 2011\overrightarrow{AB} + 2012\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad (1)$$

Tương tự ta có

$$4023\overrightarrow{B'B} + 2011\overrightarrow{BC} + 2012\overrightarrow{BA} = \vec{0}; \quad 4023\overrightarrow{C'C} + 2011\overrightarrow{CA} + 2012\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Cộng vế với vế lại ta được

$$4023(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} \Rightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$$

Do đó G là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

Bài 1.49. Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm G, gọi G_1, G_2, G_3 là trọng tâm các tam giác BCA', CAB', ABC' . Chứng minh rằng $\Delta G_1G_2G_3$ cũng có trọng tâm G.

Hướng dẫn giải

Vì ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm G suy ra $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

Vì G_1, G_2, G_3 là trọng tâm các tam giác BCA', CAB', ABC' nên

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AG_1} + 3\overrightarrow{BG_2} + 3\overrightarrow{CG_3} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'}) \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_3} = \vec{0}$ do đó G là trọng tâm $\Delta G_1G_2G_3$.

Bài 1.50. Cho tứ giác ABCD có trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác $\Delta ABC, \Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB$. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$.

Hướng dẫn giải

G là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4 \Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_4} = \vec{0} \quad (*)$

Vì G_1 là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_1}$, tương tự ta có

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_2}, \quad \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GG_3}, \quad \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GG_4}$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0} \quad (\text{đúng}) \quad \text{đpcm}$$

Bài 1.51. Cho tam giác ABC đều và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng tam giác $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải

Gọi D, E, F tương ứng là giao điểm của MA_1, MB_1, MC_1 với các cạnh BC, CA, AB. O là trọng tâm đều ΔABC

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF})$$

$$\text{Mặt khác theo bài tập 6 (dạng 2) thì } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = 3\overrightarrow{MO}$ do đó O là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$

Bài 1.52. Cho tam giác ABC, điểm O nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của O lên BC, CA, AB. Lấy các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc các tia OA_1, OB_1, OC_1 sao cho $OA_2 = a, OB_2 = b, OC_2 = c$. Chứng minh O là trọng tâm tam giác $A_2B_2C_2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} = \frac{OA_2}{OA_1}\overrightarrow{OA_1} + \frac{OB_2}{OB_1}\overrightarrow{OB_1} + \frac{OC_2}{OC_1}\overrightarrow{OC_1}$$

$$= a\frac{\overrightarrow{OA_1}}{OA_1} + b\frac{\overrightarrow{OB_1}}{OB_1} + c\frac{\overrightarrow{OC_1}}{OC_1} = \vec{0} \quad (\text{Theo định lý con nhím})$$

Do đó O là trọng tâm tam giác $A_2B_2C_2$

DẠNG TOÁN 6: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN VECTO CHO TRƯỚC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện vector ta quy về một trong các dạng sau:

- Nếu $|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
- Nếu $|\overline{MC}| = k \cdot |\overline{AB}|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k \cdot |\overline{AB}|$.
- Nếu $\overline{MA} = k\overline{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì
 - + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in \mathbb{R}$
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overline{BC}$ với $k > 0$
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overline{BC}$ với $k < 0$
- Nếu $\overline{MA} = k\overline{BC}$, $B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC

- Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn: $2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 4\overline{IC} = \vec{0}$.
- Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn: $|2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 4\overline{MC}| = |\overline{MB} - \overline{MA}|$.

Lời giải

- Ta có: $2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 4\overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{IA} + 3(\overline{IA} + \overline{AB}) + 4(\overline{IA} + \overline{AC}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 9\overline{IA} = -3\overline{AB} - 4\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{IA} = -\frac{3\overline{AB} + 4\overline{AC}}{9} \Rightarrow I$ tồn tại và duy nhất.
- Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:
 $2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 4\overline{MC} = 9\overline{MI} + (2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 4\overline{IC}) = 9\overline{MI}$ và $\overline{MB} - \overline{MA} = \overline{AB}$ nên
 $|2\overline{MA} + 3\overline{MB} + 4\overline{MC}| = |\overline{MB} - \overline{MA}| \Leftrightarrow |9\overline{MI}| = |\overline{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}$
 Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện sau:

- $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} + \overline{MC}|$
- $\overline{MA} + \overline{MB} = k(\overline{MA} + 2\overline{MB} - 3\overline{MC})$ với k là số thực thay đổi

Lời giải (hình 1.28)

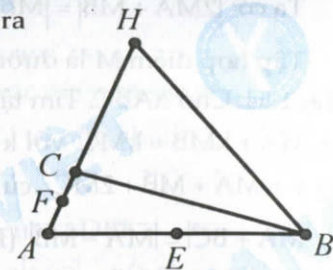
- Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

$$\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{ME} \quad \text{và} \quad \overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MF}$$

$$\text{Khi đó } |\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} + \overline{MC}|$$

$$\Leftrightarrow |2\overline{ME}| = |2\overline{MF}| \Leftrightarrow ME = MF$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF



Hình 1.28

- Ta có

$$\overline{MA} + 2\overline{MB} - 3\overline{MC} = \overline{MA} + 2(\overline{MA} + \overline{AB}) - 3(\overline{MA} + \overline{AC})$$

$$= 2\overline{AB} - 3\overline{AC} = 2\overline{AB} - 2\overline{AH} = 2\overline{HB}$$

$$\text{Với H là điểm thỏa mãn } \overline{AH} = \frac{3}{2}\overline{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overline{MA} + \overline{MB} = k(\overline{MA} + 2\overline{MB} - 3\overline{MC}) \Leftrightarrow 2\overline{ME} = 2k\overline{HB} \Leftrightarrow \overline{ME} = k\overline{HB}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overline{AM} = k\overline{AB}$, $\overline{DN} = k\overline{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải (hình 1.29)

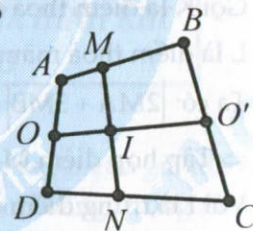
Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OO'} + \overline{O'B} \quad \text{và} \quad \overline{DC} = \overline{DO} + \overline{OO'} + \overline{O'C}$$

$$\text{Suy ra } \overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{OO'}$$

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên $\overline{AM} + \overline{DN} = 2\overline{OI}$

$$\text{Do đó } \overline{OI} = \frac{1}{2}(k\overline{AB} + k\overline{DC}) = k\overline{OO'}$$



Hình 1.29

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.53. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

- $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} - \overline{MB}|$
- $|2\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} + 2\overline{MB}|$

Hướng dẫn giải

- Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{2}$ với I là trung điểm của AB.
- Gọi K là điểm thỏa mãn: $2\overline{KA} + \overline{KB} = \vec{0}$
 L là điểm thỏa mãn: $\overline{LB} + 2\overline{LC} = \vec{0}$

Ta có: $|2\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MB} + 2\overline{MC}| \Leftrightarrow |\overline{MK}| = |\overline{ML}|$

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

Bài 1.54. Cho ΔABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

- a) $\overline{MA} + k\overline{MB} = k\overline{MC}$ với k là số thực thay đổi
b) $\vec{v} = \overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}$ cùng phương với véc tơ $\overline{BC}$
c) $|\overline{MA} + \overline{BC}| = |\overline{MA} - \overline{MB}|$ (HD: dựng hình bình hành ABCD)

Hướng dẫn giải

- a) Ta có: $\overline{MA} + k\overline{MB} = k\overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MA} = k(\overline{MC} - \overline{MB}) \Leftrightarrow \overline{MA} = k\overline{BC}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và song song với cạnh BC của ΔABC .

- b) Gọi J là trung điểm AB, I là trung điểm JC ta có $\overline{IA} + \overline{IB} + 2\overline{IC} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{v} = \overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = 4\overline{MI}$

Do đó $\vec{v}$ cùng phương với $\overline{BC}$ M thuộc đường thẳng đi qua I và song song với BC.

Bài 1.55. Cho ΔABC . Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

- a) $|2\overline{MA} + 3\overline{MB}| = |3\overline{MB} - 2\overline{MC}|$ b) $|4\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = |2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}|$

Hướng dẫn giải

- a) Gọi K là điểm thoả mãn: $2\overline{KA} + 3\overline{KB} = \vec{0}$

L là điểm thoả mãn: $3\overline{LB} - 2\overline{LC} = \vec{0}$

Ta có: $|2\overline{MA} + 3\overline{MB}| = |3\overline{MB} - 2\overline{MC}| \Leftrightarrow |\overline{MK}| = |\overline{ML}|$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

- b) Với I là trung điểm của BC. Gọi J là điểm thoả mãn: $4\overline{JA} + \overline{JB} + \overline{JC} = \vec{0}$

Ta có: $|4\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = |2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}|$

$\Leftrightarrow |6\overline{MJ}| = |2\overline{MA} - 2\overline{MI}| \Leftrightarrow |6\overline{MJ}| = |2\overline{IA}| \Leftrightarrow MJ = \frac{1}{3}IA$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính $R = \frac{1}{3}IA$.

Bài 1.56: Cho tứ giác ABCD.

- a) Xác định điểm O sao cho: $\overline{OB} + 4\overline{OC} = 2\overline{OD}$.

- b) Tìm tập hợp điểm M thoả mãn hệ thức $|\overline{MB} + 4\overline{MC} - 2\overline{MD}| = |3\overline{MA}|$

Hướng dẫn giải

- a) $\overline{OB} + 4\overline{OC} = 2\overline{OD} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{4}{3}\overline{CI}$ với I là trung điểm BD

b) $|\overline{MB} + 4\overline{MC} - 2\overline{MD}| = |3\overline{MA}| \Leftrightarrow |\overline{MO}| = |\overline{MA}|$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn OA.

Bài 1.57: Cho lục giác đều ABCDEF. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| + |\overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF}|$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi P là trọng tâm của ΔABC , Q là trọng tâm của ΔDEF

$|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| + |\overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF}| = 3|\overline{MP}| + 3|\overline{MQ}| = 3(MP + MQ) \geq 3QP$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn PQ

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là mọi điểm thuộc đoạn PQ

Bài 1.58: Trên hai tia Ox và Oy của góc xOy lấy hai điểm M, N sao cho $OM + ON = a$ với a là số thực cho trước. tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN

Hướng dẫn giải

Gọi hai điểm M_0, N_0 lần lượt thuộc tia Ox và Oy sao cho

$OM_0 = ON_0 = \frac{a}{2}$. Giả sử $OM = k, 0 \leq k \leq a$ khi đó ta có $\overline{MI} = \frac{a-k}{a}\overline{M_0N_0}$.

Do đó tập hợp điểm I là đoạn M_0N_0 .

DẠNG TOÁN 7: XÁC ĐỊNH TÍNH CHẤT CỦA HÌNH KHI BIẾT MỘT ĐẲNG THỨC VECTO

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Phân tích được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả " $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$ với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương".

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác ABCD. Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết $\overline{PM} = \frac{1}{5}\overline{BM}$;

$\overline{AP} = \frac{2}{5}\overline{AN}$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành.

Lời giải

Ta có: $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AM} + 5\overline{MP}$

$$= 5\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AD}$$

$$= 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) - 2\overrightarrow{AD}$$

$$= 2\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thỏa mãn: $a^2\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Lời giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$.

Suy ra $a^2\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow a^2(-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a^2)\overrightarrow{GB} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{GC} = \vec{0}. (*)$$

Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vectơ không cùng phương, do đó (*) tương đương với:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 0 \\ c^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \text{ hay tam giác ABC đều.}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trung tuyến AA' và B', C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{AB'} = m\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'} = n\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

và $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Mặt khác A' là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Do đó $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\text{hay } \left(n - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Vì $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương suy ra $m = n = \frac{1}{2}$ do đó B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB

Vậy BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.59: Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O thỏa mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh tứ giác ABCD là hình bình hành.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} = y\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OB} = z\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{BD}$

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow (x+y)\overrightarrow{AC} + (z+t)\overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Do đó $x = -y$; $z = -t \Rightarrow OA = OC$, $OB = OD$ nên tứ giác ABCD là hình bình hành.

Bài 1.60: Cho ABC có BB', CC' là các trung tuyến, A' là điểm trên BC thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh AA' cũng là trung tuyến của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow AA'$ cũng là trung tuyến của tam giác ABC.

Bài 1.61: Cho ABC có A', B', C' là các điểm thay đổi trên BC, CA, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy và thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh AA', BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\overrightarrow{A'B} = k\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{B'C} = m\overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{C'A} = n\overrightarrow{C'B}$

$$\overrightarrow{A'B} = k\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}$$

Tương tự ta có

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}}{1-m} = \frac{(m-1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1-m}, \quad \overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CA} - n\overrightarrow{CB}}{1-n} = \frac{-n\overrightarrow{AB} + (n-1)\overrightarrow{AC}}{1-n}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-k} - 1 - \frac{n}{1-n}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{-k}{1-k} + \frac{1}{1-m} - 1\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \frac{1}{1-k} - 1 - \frac{n}{1-n} = \frac{-k}{1-k} + \frac{1}{1-m} - 1 = 0 \Rightarrow k = m = n.$$

Mặt khác theo định lý Xêva ta có $kmn = -1$ nên $k = m = n = -1$

Vậy AA', BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Bài 1.62: Cho 4 điểm A, B, C, D; I là trung điểm AB và J thuộc CD thỏa mãn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$. Chứng minh J là trung điểm của CD.

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ}$$

Gọi K là trung điểm DC suy ra $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IK}$ do đó $K \equiv J$ hay J là trung điểm của CD.

Bài 1.63: Cho tứ giác ABCD. Giả sử tồn tại điểm O sao cho $OA=OB=OC=OD$ và $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$. Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải

Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD, DA

Từ phương trình thứ hai ta được:

$$\vec{0}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=2\vec{OM}+2\vec{OP}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OM}+\vec{OP}=\vec{0}$$

$\Leftrightarrow M, P, O$ thẳng hàng và O là trung điểm MP

$$\vec{0}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=2\vec{ON}+2\vec{OQ} \Leftrightarrow \vec{ON}+\vec{OQ}=\vec{0}$$

$\Leftrightarrow N, Q, O$ thẳng hàng và O là trung điểm NQ.

Ta có $\triangle OAD$ cân tại O nên $NQ \perp AD$, $\triangle OBC$ cân tại O nên $NQ \perp BC$ suy ra $AD \parallel BC$.

Tương tự $AB \parallel DC$ suy ra ABCD là hình bình hành

Mà N, Q là trung điểm của BC, AD nên $AB \parallel NQ \Rightarrow AB \perp BC$

Suy ra ABCD là hình chữ nhật.

Bài 1.64: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, gọi G là trọng tâm tam giác ABC. A', B', C' là các điểm thỏa mãn:

$$\vec{OA}=3\vec{OA'}, \vec{OB}=3\vec{OB'}, \vec{OC}=3\vec{OC'}.$$

Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác $A'B'C'$.

Hướng dẫn giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên $3\vec{OG}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$

$$\text{Do đó } \vec{OG}=\vec{OA'}+\vec{OB'}+\vec{OC'}$$

Suy ra G là trực tâm tam giác $A'B'C'$

Bài 1.65: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, gọi H là trực tâm tam giác. A', B', C' là các điểm thỏa mãn: $\vec{OA'}=3\vec{OA}, \vec{OB'}=3\vec{OB}, \vec{OC'}=3\vec{OC}$. Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Hướng dẫn giải

H là trực tâm tam giác ABC suy ra $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$

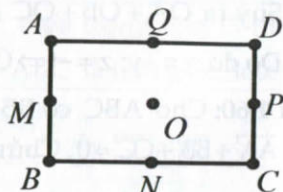
Do đó $3\vec{OH}=\vec{OA'}+\vec{OB'}+\vec{OC'}$ hay H là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Bài 1.66: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng AM cắt BC tại D, BM cắt CA tại E và CM cắt AB tại F. Chứng minh rằng nếu $\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{0}$ thì M là trọng tâm tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau

Cho ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ đôi một không cùng phương và thỏa mãn điều kiện:



Hình 1.55

$$\begin{cases} m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0} \\ m'\vec{a}+n'\vec{b}+p'\vec{c}=\vec{0} \end{cases} \quad (m, m' \neq 0)$$

Chứng minh rằng: $\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}=\frac{p}{p'}$. Thật vậy:

Để thấy $m, m' \neq 0$ thì suy ra ngay n, n', p, p' cũng phải khác không.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} \vec{a}=\frac{n}{m}\vec{b}+\frac{p}{m}\vec{c} \\ \vec{a}=\frac{n'}{m'}\vec{b}+\frac{p'}{m'}\vec{c} \end{cases}$$

Vì một vectơ chỉ phân tích được một cách duy nhất qua hai vectơ không cùng phương nên $\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}, \frac{p}{m}=\frac{p'}{m'} \Rightarrow \frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}=\frac{p}{p'}$

Trở lại bài toán

$$\text{Ta có } \vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=\vec{0} \Leftrightarrow \frac{AD}{MA}\vec{MA}+\frac{BE}{MB}\vec{MB}+\frac{CF}{MC}\vec{MC}=\vec{0}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{AD}{MA}=\frac{S_{ABD}}{S_{ABM}}=\frac{S_{ADC}}{S_{ACM}}=\frac{S}{S-S_a},$$

$$\text{Tương tự } \frac{BE}{MB}=\frac{S}{S-S_b} \text{ và } \frac{CF}{MC}=\frac{S}{S-S_c}$$

(với $S=S_{ABC}, S_a=S_{MBC}, S_b=S_{MCA}, S_c=S_{MAB}$)

$$\text{Do đó ta có } \frac{MA}{S-S_a}+\frac{MB}{S-S_b}+\frac{MC}{S-S_c}=\vec{0}$$

$$\text{Mặt khác ta cũng có } S_a\vec{MA}+S_b\vec{MB}+S_c\vec{MC}=\vec{0}$$

Áp dụng bổ đề suy ra $\frac{1}{S-S_a}=\frac{1}{S-S_b}=\frac{1}{S-S_c} \Leftrightarrow S_a=S_b=S_c$ hay M trùng trọng tâm tam giác ABC.

DẠNG TOÁN 8: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VECTO

1. PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có:

+ $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$, dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

+ $|\vec{a}-\vec{b}| \geq ||\vec{a}|-|\vec{b}||$, dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng

- Đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm cực trị của $|\overline{MI}|$ với M thay đổi
 - + Nếu M là điểm thay đổi trên đường thẳng Δ khi đó $|\overline{MI}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ .
 - + Nếu M là điểm thay đổi trên đường tròn (O) khi đó $|\overline{MI}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn; $|\overline{MI}|$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia IO với đường tròn.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $T = |\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}|$

Lời giải:

Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBI thì $\overline{IA} + \overline{IB} - \overline{IC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } T &= |(\overline{MI} + \overline{IA}) + (\overline{MI} + \overline{IB}) - (\overline{MI} + \overline{IC})| \\ &= |\overline{MI} + \overline{IA} + \overline{IB} - \overline{IC}| = |\overline{MI}| \end{aligned}$$

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T = AA' + BB' + CC'$

Lời giải:

Vì $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ và $\overline{G'A'} + \overline{G'B'} + \overline{G'C'} = \vec{0}$ nên

$$\begin{aligned} \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} &= \overline{AG} + \overline{GG'} + \overline{G'A} + \overline{BG} + \overline{GG'} + \overline{G'B} + \overline{CG} + \overline{GG'} + \overline{G'C} \\ &= 3\overline{GG'} - (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + (\overline{G'A} + \overline{G'B} + \overline{G'C}) = 3\overline{GG'} \end{aligned}$$

Do đó:

$$AA' + BB' + CC' = |\overline{AA'}| + |\overline{BB'}| + |\overline{CC'}| \geq |\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'}| = 3|\overline{GG'}| = 3GG'$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vector $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ cùng hướng

Vậy giá trị nhỏ nhất T là $3GG'$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.67: Cho tam giác ABC, đường thẳng d và ba số α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức $T = |\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} + \gamma\overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Do $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ nên tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha\overline{IA} + \beta\overline{IB} + \gamma\overline{IC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} + \gamma\overline{MC} &= \alpha(\overline{MI} + \overline{IA}) + \beta(\overline{MI} + \overline{IB}) + \gamma(\overline{MI} + \overline{IC}) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\overline{MI} + \alpha\overline{IA} + \beta\overline{IB} + \gamma\overline{IC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overline{MI} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } T = |\alpha + \beta + \gamma| \cdot MI$$

Suy ra T nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Bài 1.68: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trên đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$

a) Đạt giá trị lớn nhất

b) Đạt giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

G là trọng tâm tam giác ABC ta có $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 3|\overline{MG}|$

a) M là giao điểm của tia GO với (C)

b) M là giao điểm của tia OG với (C)

Bài 1.69: Cho tam giác ABC. M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\overline{BM} = k\overline{BC}$, $\overline{CN} = k\overline{CA}$, $\overline{AP} = k\overline{AB}$. Chứng minh rằng các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \vec{0}$

$$\text{Suy ra } \overline{AM} = -(\overline{BN} + \overline{CP}) \Rightarrow |\overline{AM}| = |\overline{BN} + \overline{CP}| \leq |\overline{BN}| + |\overline{CP}|$$

Vì $\overline{BN}$ và $\overline{CP}$ không cùng phương nên không thể xảy ra dấu bằng do đó $AM < BN + CP$. Tương tự ta có $BN < AM + CP$, $CP < AM + BN$

Bài 1.70: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc cạnh AB và không trùng với các đỉnh ta có: $MC \cdot AB < MA \cdot BC + MB \cdot AC$

Hướng dẫn giải

$$\overline{CM} = \frac{MB}{AB}\overline{CA} + \frac{MA}{AB}\overline{CB} \Rightarrow MC < \frac{MB}{AB}CA + \frac{MA}{AB}CB$$

Hay $MC \cdot AB < MA \cdot BC + MB \cdot AC$

Bài 1.71: Cho tứ giác ABCD, M là điểm thuộc đoạn CD. Gọi p, p_1 , p_2 lần lượt là chu vi của các tam giác AMB, ACB, ADB.

Chứng minh rằng $p < \max\{p_1; p_2\}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \overline{AM} = \frac{MD}{CD} \overline{AC} + \frac{MC}{CD} \overline{AD} \Rightarrow AM < \frac{MD}{CD} AC + \frac{MC}{CD} AD$$

$$\text{và } \overline{BM} = \frac{MD}{CD} \overline{BC} + \frac{MC}{CD} \overline{BD} \Rightarrow BM < \frac{MD}{CD} BC + \frac{MC}{CD} BD$$

$$\text{Từ đó suy ra: } AM + BM < \frac{MD}{CD} (AC + BC) + \frac{MC}{CD} (AD + BD)$$

$$\Rightarrow AM + BM < \left(\frac{MD}{CD} + \frac{MC}{CD} \right) \cdot \max \{ AC + BC; AD + BD \}$$

$$\Rightarrow p < \max \{ AC + BC + AB; AD + BD + AB \}$$

$$\text{Hay } p < \max \{ p_1; p_2 \}.$$

Bài 1.72: Trên đường tròn tâm O bán kính bằng 1 lấy $2n+1$ điểm $P_i, i=1,2,\dots,2n+1 (n \in \mathbb{N})$ ở cùng phía với đối với đường kính nào đó.

$$\text{Chứng minh rằng } \left| \sum_{i=1}^{2n+1} \overline{OP_i} \right| \geq 1.$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng quy nạp

+ Với $n=0$: hiển nhiên.

+ Giả sử BĐT đúng với $n=k$ ta đi chứng minh đúng với $n=k+1$ hay

$$\left| \sum_{i=1}^{2k+3} \overline{OP_i} \right| \geq 1$$

Trong $2k+3$ vectơ ta chọn hai vectơ có góc lớn nhất, giả sử $\overline{OP_1}, \overline{OP_{2k+3}}$.

$$\text{Đặt } \overline{OA} = \overline{OP_1} + \overline{OP_{2k+3}}, \overline{OB} = \sum_{i=2}^{2k+2} \overline{OP_i}.$$

Suy ra điểm A, B nằm trong góc $\widehat{P_1OP_{2k+3}}$ do đó $\widehat{AOB} \leq 90^\circ$

$$\Rightarrow |\overline{OA} + \overline{OB}| \geq |\overline{OB}|$$

$$\text{Mặt khác theo giả thiết quy nạp ta có } |\overline{OB}| = \left| \sum_{i=2}^{2k+2} \overline{OP_i} \right| \geq 1$$

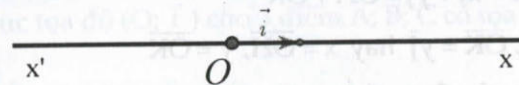
$$\text{Suy ra } \left| \sum_{i=1}^{2k+3} \overline{OP_i} \right| = |\overline{OA} + \overline{OB}| \geq |\overline{OB}| \geq 1$$

§4 TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. TRỤC TỌA ĐỘ:

1. **Định nghĩa:** Trục tọa độ (Trục, hay trục số) là một đường thẳng trên đó ta đã xác định một điểm O và một vectơ đơn vị $\vec{i}$ (tức là $|\vec{i}|=1$)



Hình 1.30

Điểm O được gọi là *gốc tọa độ*, vectơ $\vec{i}$ được gọi là *vector đơn vị* của trục tọa độ. Kí hiệu $(O; \vec{i})$ hay $x'Ox$ hoặc đơn giản là Ox .

2. Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục:

+ Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $(O; \vec{i})$ thì có số thực a sao cho $\vec{u} = a\vec{i}$ với $a \in \mathbb{R}$. Số a như thế được gọi là *tọa độ* của vectơ $\vec{u}$ đối với trục $(O; \vec{i})$

+ Cho điểm M nằm trên $(O; \vec{i})$ thì có số m sao cho $\overline{OM} = m\vec{i}$. Số m như thế được gọi là *tọa độ* của điểm M đối với trục $(O; \vec{i})$

Như vậy tọa độ điểm M là tọa độ vectơ $\overline{OM}$.

3. Độ dài đại số của vectơ trên trục:

Cho hai điểm A, B nằm trên trục Ox thì tọa độ của vectơ $\overline{AB}$ kí hiệu là $\overline{AB}$ và gọi là *độ dài đại số* của vectơ $\overline{AB}$ trên trục Ox

Như vậy $\overline{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$

Tính chất:

$$+ \overline{AB} = -\overline{BA}$$

$$+ \overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

$$+ \forall A; B; C \in (O; \vec{i}): \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

II. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1. **Định nghĩa:** Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$. Điểm O gọi là *gốc tọa độ*, Ox gọi là *trục hoành* và Oy gọi là *trục tung*.

Kí hiệu Oxy hay $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Hình 1.31

2. Tọa độ điểm, tọa độ vectơ.

+ Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ nếu $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $(x; y)$ được gọi là *tọa độ* của vectơ $\vec{u}$, kí hiệu là $\vec{u} = (x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$.

x được gọi là hoành độ, y được gọi là tung độ của vector $\vec{u}$

+ Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tọa độ của vector $\vec{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M , kí hiệu là $M = (x; y)$ hay $M(x; y)$. x được gọi là hoành độ, y được gọi là tung độ của điểm M .

Nhận xét: (hình 1.31) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên Ox và Oy thì $M(x; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{OH} + \vec{OK}$

Như vậy $\vec{OH} = x\vec{i}$, $\vec{OK} = y\vec{j}$ hay $x = \vec{OH}$, $y = \vec{OK}$

3. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm tam giác.

+ Cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và M là trung điểm AB . Tọa độ trung điểm

$M(x_M; y_M)$ của đoạn thẳng AB là $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

+ Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Tọa độ trọng tâm

$G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC là $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ và $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

4. Biểu thức tọa độ của các phép toán vector.

Cho $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{v} = (x'; y')$ và số thực k . Khi đó ta có:

$$1) \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$2) \vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$$

$$3) k\vec{u} = (kx; ky)$$

$$4) \vec{u} \text{ cùng phương } \vec{v} (\vec{u} \neq \vec{0}) \text{ khi và chỉ khi có số } k \text{ sao cho } \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

$$5) \text{ Cho } A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) \text{ thì } \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM; TỌA ĐỘ VECTO; ĐỘ DÀI ĐẠI SỐ CỦA VECTO VÀ CHỨNG MINH HỆ THỨC LIÊN QUAN TRÊN TRỤC $(O; \vec{i})$

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Sử dụng các kiến thức cơ bản sau:

- Điểm M có tọa độ $a \Leftrightarrow \vec{OM} = a\vec{i}$
- Vector $\vec{AB}$ có độ dài đại số là $m = \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AB} = m\vec{i}$
- Nếu a, b lần lượt là tọa độ của A, B thì $\vec{AB} = b - a$

• Các tính chất

$$+ \vec{AB} = -\vec{BA}$$

$$+ \vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CD}$$

$$+ \forall A; B; C \in (O; \vec{i}) : \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 3 điểm $A; B; C$ có tọa độ lần lượt là $-2; 1$ và 4 .

a) Tính tọa độ các vector $\vec{AB}; \vec{BC}; \vec{CA}$

b) Chứng minh B là trung điểm của AC .

Lời giải

a) Ta có $\vec{AB} = 1 - (-2) = 3$, $\vec{BC} = 4 - 1 = 3$, $\vec{CA} = -2 - 4 = -6$

b) Ta có $\vec{BA} = -3 = -\vec{BC} \Rightarrow \vec{BA} = -\vec{BC}$ suy ra B là trung điểm AC

Ví dụ 2: Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 4 điểm A, B, C, D bất kỳ.

Chứng minh $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$

Lời giải

Cách 1: Giả sử tọa độ các điểm A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d .

$$\text{Ta có } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = (b - a)(d - c) = bd + ac - bc - ad$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} = (c - a)(b - d) = bc + ad - cd - ab$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = (d - a)(c - b) = cd + ab - ac - bd$$

$$\text{Cộng vế với vế lại ta được } \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$\text{Cách 2: } \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} =$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AD} - \vec{AC}) + \vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{AD}) + \vec{AD} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})$$

$$= \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AC} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AC} - \vec{AD} \cdot \vec{AB}$$

$$= 0$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.73. Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ Cho 2 điểm A và B có tọa độ lần lượt a và b .

a) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\vec{MA} = k\vec{MB}$ ($k \neq 1$)

b) Tìm tọa độ trung điểm I của AB

c) Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\vec{NA} = -5\vec{NB}$

Hướng dẫn giải

$$a) x_M = \frac{kb - a}{k - 1}$$

$$b) x_I = \frac{a + b}{2}$$

$$c) x_N = \frac{5b + 2a}{7}$$

Bài 1.74. Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ cho 4 điểm A, B, C, D có tọa độ lần lượt là a, b, c, d và thỏa mãn hệ thức $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$.

Chúng minh rằng $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{a-d}{b-d} = -\frac{a-c}{b-c}$

$\Leftrightarrow ab - ac - bd + cd = bc - ab - cd + ad$

$\Leftrightarrow 2(ab + cd) = c(a + b) + d(a + b)$

$\Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$

DẠNG TOÁN 2: TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTO TRÊN MẶT PHẪNG Oxy .

1. PHƯƠNG PHÁP.

- Để tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$ ta làm như sau

Dựng vectơ $\overline{OM} = \vec{a}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên Ox, Oy . Khi đó $\vec{a}(a_1; a_2)$ với $a_1 = \overline{OH}, a_2 = \overline{OK}$

- Để tìm tọa độ điểm A ta đi tìm tọa độ vectơ $\overline{OA}$
- Nếu biết tọa độ hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ suy ra tọa độ $\overline{AB}$ được xác định theo công thức $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

Chú ý: $\overline{OH} = OH$ nếu H nằm trên tia Ox (hoặc Oy) và $\overline{OH} = -OH$ nếu H nằm trên tia đối tia Ox (hoặc Oy)

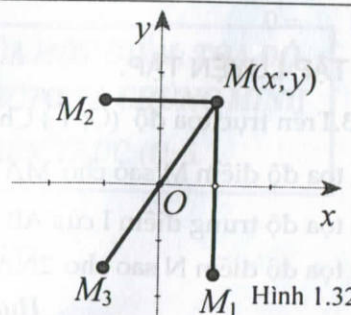
2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Cho điểm $M(x; y)$.

Tìm tọa độ của các điểm

- M_1 đối xứng với M qua trục hoành
- M_2 đối xứng với M qua trục tung
- M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ



Hình 1.32

Lời giải (hình 1.32)

- M_1 đối xứng với M qua trục hoành suy ra $M_1(x; -y)$

- M_2 đối xứng với M qua trục tung suy ra $M_2(-x; y)$
- M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra $M_3(-x; -y)$

Ví dụ 2: Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1; 3)$. Biết điểm B thuộc trục $(O; \vec{i})$ và $\overline{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vectơ $\overline{AB}, \overline{BC}$ và $\overline{AC}$

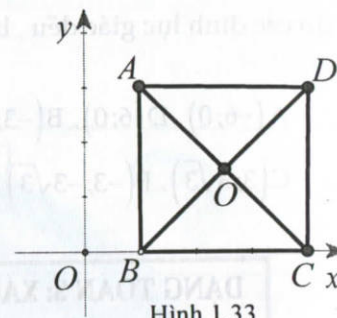
Lời giải (hình 1.33)

Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ (hình bên)

Vì điểm $A(1; 3)$ suy ra $AB = 3, OB = 1$

Do đó $B(1; 0), C(4; 0), D(4; 3)$

Vậy $\overline{AB}(0; -3), \overline{BC}(3; 0)$ và $\overline{AC}(3; -3)$



Hình 1.33

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết A trùng với gốc tọa độ O , C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$.

Lời giải (hình 1.34)

Từ giả thiết ta xác định được hình thoi trên mặt phẳng tọa độ Oxy

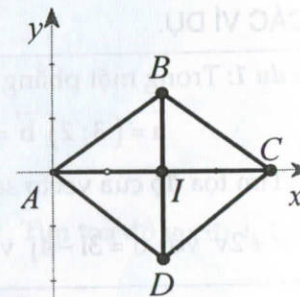
Gọi I là tâm hình thoi ta có

$$BI = AB \sin \widehat{BAI} = a \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$$

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra

$$A(0; 0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right), C(a\sqrt{3}; 0), D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$$



Hình 1.34

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.75: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 4$ và chiều cao ứng với cạnh $AD = 3, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Chọn hệ trục tọa độ $(A; \vec{i}; \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overline{AD}$ cùng hướng, $y_B > 0$. Tìm tọa độ các vectơ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ và $\overline{AC}$

Hướng dẫn giải

Kẻ $BH \perp AD \Rightarrow BH = 3; AB = 2\sqrt{3}; AH = \sqrt{3}$

$$A(0;0); B(\sqrt{3};3) \quad C(4+\sqrt{3};3) \quad D(4;0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{3};3) \quad \overrightarrow{BC} = (4;0) \quad \overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3};-3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4+\sqrt{3};3)$$

Bài 1.76: Cho lục giác đều ABCDEF. Chọn hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, trong đó O là tâm lục giác đều, $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OD}$, $\vec{j}$ cùng hướng $\overrightarrow{EC}$. Tính tọa độ các đỉnh lục giác đều, biết cạnh của lục giác là 6.

Hướng dẫn giải

$$A(-6;0), D(6;0), B(-3;3\sqrt{3}),$$

$$C(3;3\sqrt{3}), F(-3;-3\sqrt{3}), E(3;-3\sqrt{3})$$

DẠNG TOÁN 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM, VECTƠ LIÊN QUAN ĐẾN BIỂU THỨC DẠNG $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Dùng công thức tính tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$

Với $\vec{u} = (x;y); \vec{u}' = (x';y')$ và số thực k, khi đó $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$ và $k \cdot \vec{u} = (kx; ky)$.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 vectơ:

$$\vec{a} = (3;2) \quad \vec{b} = (-1;5) \quad \vec{c} = (-2;-5)$$

Tìm tọa độ của vectơ sau

$$a) \vec{u} + 2\vec{v} \text{ với } \vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \text{ và } \vec{v} = \frac{\pi}{2}\vec{i} \quad b) \vec{k} = 2\vec{a} + \vec{b} \text{ và } \vec{l} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \vec{u} + 2\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \pi\vec{i} = (3+\pi)\vec{i} - 4\vec{j} \text{ suy ra } \vec{u} + 2\vec{v} = (3+\pi; -4)$$

$$b) \text{ Ta có } 2\vec{a} = (6;4) \quad \vec{b} = (-1;5) \text{ suy ra } \vec{k} = (6-1;4+5) = (5;9);$$

$$-\vec{a} = (-3;-2), 2\vec{b} = (-2;10) \text{ và } 5\vec{c} = (-10;-25) \text{ suy ra}$$

$$\vec{l} = (-3-2-10; -2+10-25) = (-15;-17)$$

Ví dụ 2: Cho $\vec{a} = (1;2); \vec{b} = (-3;4); \vec{c} = (-1;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}$ biết

$$a) 2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

$$b) 3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } 2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\text{Suy ra } \vec{u} = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}; 3 - 2\right) = (3;1)$$

$$b) \text{ Ta có } 3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\text{Suy ra } \vec{u} = \left(-\frac{2}{3} + 3 - 1; -\frac{4}{3} - 4 + 3\right) = \left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$$

Ví dụ 3: Cho ba điểm A(-4;0), B(0;3) và C(2;1)

$$a) \text{ Xác định tọa độ vectơ } \vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$b) \text{ Tìm điểm M sao cho } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \overrightarrow{AB} = (4;3), \overrightarrow{AC} = (6;1) \text{ suy ra } \vec{u} = (2;5)$$

$$b) \text{ Gọi } M(x;y), \text{ ta có } \overrightarrow{MA} = (-4-x;-y), \overrightarrow{MB} = (-x;3-y), \overrightarrow{MC} = (2-x;1-y)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (-6x+2; -6y+9)$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -6x+2=0 \\ -6y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.77. Cho các vectơ $\vec{a} = (2;0), \vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right), \vec{c} = (4;6)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ biết

$$a) \vec{u} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 5\vec{c}$$

$$b) \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{u} = \vec{c}$$

Hướng dẫn giải

$$a) \vec{u} = (28; -28)$$

$$b) \vec{u} = (0; \frac{7}{2})$$

Bài 1.78. Cho ba điểm A(-4;0), B(-5;0) và C(3;-3)

$$a) \text{ Tìm tọa độ vectơ } \vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA}$$

$$b) \text{ Tìm điểm M sao cho } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Hướng dẫn giải

$$a) \vec{u} = (-38;3)$$

$$b) M(-2;-1)$$

DẠNG TOÁN 4: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CÁC ĐIỂM CỦA MỘT HÌNH

1. PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào tính chất của hình và sử dụng công thức

+ M là trung điểm đoạn thẳng AB suy ra $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

+ G trọng tâm tam giác ABC suy ra $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

+ $\vec{u}(x; y) = \vec{u}'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2).

a) Tìm tọa độ trung điểm M sao cho C là trung điểm của đoạn MB

b) Xác định trọng tâm tam giác ABC

c) Tìm điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

Lời giải

a) C là trung điểm của MB suy ra $x_C = \frac{x_M + x_B}{2} \Rightarrow x_M = 2x_C - x_B = -5$

Và $y_C = \frac{y_M + y_B}{2} \Rightarrow y_M = 2y_C - y_B = 6$

Vậy M(-5;6)

b) G là trọng tâm tam giác suy ra

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 - 1 - 3}{3} = -\frac{2}{3}$ và $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1 - 2 + 2}{3} = \frac{1}{3}$

Vậy $G(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$

c) Gọi D(x;y) $\Rightarrow \vec{DC} = (-3 - x; 2 - y)$

Ta có: ABCD là hình bình hành suy ra

$\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = -3 \\ 2 - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(0;5).$

Vậy D(0;5)

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho A(3;-1), B(-1;2) và I(1;-1). Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ O của hình bình hành ABCD.

Lời giải

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên

$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 3x_I - x_A - x_B = 1$

$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_C = 3y_I - y_A - y_B = -4$

Suy ra C(1;-4)

Tứ giác ABCD là hình bình hành suy ra

$\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 3 = 1 - x_D \\ 2 + 1 = -4 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -7 \end{cases} \Rightarrow D(5;-7)$

Điểm O của hình bình hành ABCD suy ra O là trung điểm AC do đó

$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = 2, y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow O(2; -\frac{5}{2})$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.79: Cho ba điểm A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)

a) Tìm tọa độ trung điểm cạnh BC và tọa độ trọng tâm của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành

Hướng dẫn giải

a) Trung điểm BC là $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, trọng tâm của tam giác ABC là $G(\frac{4}{3}; 1)$

b) Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow D(0;1)$

Bài 1.80: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho A(3;4), B(-1;2), I(4;1). Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành và I là trung điểm cạnh CD. Tìm tọa độ O của hình bình hành ABCD.

Hướng dẫn giải

Do I(4;-1) là trung điểm của CD nên đặt

$C(4 - x; -1 - y), D(4 + x; -1 + y) \Rightarrow \vec{CD}(2x; 2y)$

Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \vec{CD} = \vec{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy C(2;-2), D(6;0), O($\frac{9}{2}; 2$)

Bài 1.81: Cho tam giác ABC có $A(3;1)$, $B(1;-3)$, đỉnh C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ đỉnh C.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $C(0;y)$, $G(x;0)$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác nên } \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $C(0;2)$

Bài 1.82: Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Biết $M(1;1)$, $N(-2;-3)$, $P(2;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MN}(-3;-4)$, $\overrightarrow{PA}(x_A - 2; y_A + 1)$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA} \Rightarrow A(-1;-5)$

N là trung điểm AC suy ra $C(-3;-1)$

M là trung điểm BC suy ra $B(5;3)$

Bài 1.83: Cho tam giác ABC có $A(3;4)$, $B(-1;2)$, $C(4;1)$. A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A.

a) Tìm tọa độ các điểm A' , B' , C'

b) Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn giải

a) A' là điểm đối xứng của A qua B suy ra B là trung điểm của AA' do đó $A'(-5;0)$. Tương tự $B'(9;0)$, $C'(2;7)$

b) Trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng tọa độ là $(2; \frac{7}{3})$

DẠNG TOÁN 5: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỰ CÙNG PHƯƠNG CỦA HAI VECTƠ. PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ QUA HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG.

1. PHƯƠNG PHÁP.

- Cho $\vec{u} = (x;y)$; $\vec{u}' = (x';y')$. Vectơ $\vec{u}'$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Chú ý: Nếu $xy \neq 0$ ta có $\vec{u}'$ cùng phương $\vec{u} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$

- Để phân tích $\vec{c}(c_1;c_2)$ qua hai vectơ $\vec{a}(a_1;a_2)$, $\vec{b}(b_1;b_2)$ không cùng phương, ta giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Khi đó ta quy về giải hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;0)$; $\vec{c} = (-1;3)$

a) Chứng minh hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương

b) Phân tích vectơ $\vec{c}$ qua $\vec{a}$; $\vec{b}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{-3}{1} \neq \frac{0}{2} \Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương

b) Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Ta có $x\vec{a} + y\vec{b} = (x-3y; 2x)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x-3y = -1 \\ 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$$

Ví dụ 2: Cho $\vec{u} = (m^2 + m - 2; 4)$ và $\vec{v} = (m; 2)$. Tìm m để hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

+ Với $m = 0$: Ta có $\vec{u} = (-2; 4)$; $\vec{v} = (0; 2)$

Vì $\frac{0}{-2} \neq \frac{2}{4}$ nên hai vectơ $\vec{u}$; $\vec{v}$ không cùng phương

+ Với $m \neq 0$: Ta có $\vec{u}$; $\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{m^2 + m - 2}{m} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy với $m = -1$ và $m = 2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$.

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.
- Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.
- Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$.
- Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC.

Lời giải

a) Ta có $\overline{AB}(-9;3)$, $\overline{AC}(-5;-5)$. Vì $\frac{-9}{-5} \neq \frac{3}{-5}$ suy ra $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$ không cùng phương

Hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) D trên trục hoành $\Rightarrow D(x;0)$

Ba điểm A, B, D thẳng hàng suy ra $\overline{AB}$ và $\overline{AD}$ cùng phương

Mặt khác $\overline{AD}(x-6;-3)$ do đó $\frac{x-6}{-9} = \frac{-3}{-5} \Rightarrow x = 15$

Vậy $D(15;0)$

c) Vì E thuộc đoạn BC và $BE = 2EC$ suy ra $\overline{BE} = 2\overline{EC}$

Gọi $E(x;y)$ khi đó $\overline{BE}(x+3;y-6)$, $\overline{EC}(1-x;-2-y)$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x+3=2(1-x) \\ y-6=2(-2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $E(-\frac{1}{3};\frac{2}{3})$

d) Gọi $I(x;y)$ là giao điểm của DE và AC.

Do đó $\overline{DI}(x-15;y)$, $\overline{DE}(-\frac{46}{3};\frac{2}{3})$ cùng phương suy ra

$$\frac{3(x-15)}{-46} = \frac{3y}{2} \Rightarrow x+23y-15=0 \quad (1)$$

$\overline{AI}(x-6;y-3)$, $\overline{AC}(-5;-5)$ cùng phương suy ra

$$\frac{x-6}{-5} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow x-y-3=0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = \frac{7}{2}$ và $y = \frac{1}{2}$

Vậy giao điểm hai đường thẳng DE và AC là $I(\frac{7}{2};\frac{1}{2})$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.84. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm A(1;-2), B(0;3), C(-3;4) và D(-1;8).

- Bộ ba trong 4 điểm trên bộ nào thẳng hàng
- Chứng minh $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$ không cùng phương
- Phân tích $\overline{CD}$ qua $\overline{AB}$ và $\overline{AC}$

Hướng dẫn giải

- A, B, D thẳng hàng
- $\overline{AB}(-1;5)$, $\overline{AC}(-4;6)$. Vì $\frac{-1}{-4} \neq \frac{5}{6} \Rightarrow \overline{AB}$ và $\overline{AC}$ không cùng phương
- $\overline{CD}(2;4)$. $\overline{CD} = x\overline{AB} + y\overline{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-4y=2 \\ 5x+6y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \overline{CD} = 2\overline{AB} - \overline{AC}$

Bài 1.85. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm A(0;1), B(1;3), C(2;7) và D(0;3). Tìm giao điểm của 2 đường thẳng AC và BD

Hướng dẫn giải

Gọi $I(x;y)$ là giao điểm AC và BD suy ra $\overline{AI}$; $\overline{AC}$ cùng phương và $\overline{BI}$; $\overline{BD}$ cùng phương

Mặt khác: $\overline{AI}(x;y-1)$, $\overline{AC}(2;6)$ suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{6} \Leftrightarrow 6x-2y=-2 \quad (1)$

$\overline{BI}(x-1;y-3)$, $\overline{BD}(-1;0)$ suy ra $y=3$ thế vào (1) ta có $x = \frac{2}{3}$

Vậy $I(\frac{2}{3};3)$ là điểm cần tìm.

Bài 1.86. Cho $\vec{a} = (3;2)$, $\vec{b} = (-3;1)$

- Chứng minh $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương
- Đặt $\vec{u} = (2-x)\vec{a} + (3+y)\vec{b}$. Tìm x, y sao cho $\vec{u}$ cùng phương với $x\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

Hướng dẫn giải

b) Ta có $\vec{u} = (-3x-3y-3; -2x+y+7)$

$$x\vec{a} + \vec{b} = (3x-3; 2x+1), \vec{a} + \vec{b} = (0;3)$$

$\vec{u}$ cùng phương với $x\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ khi và chỉ khi có số k, l sao cho

$$\vec{u} = k(x\vec{a} + \vec{b}), \vec{u} = l(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} -3x - 3y - 3 = k(3x - 3) \\ -2x + y + 7 = k(2x + 1) \\ -3x - 3y - 3 = 0 \\ -2x + y + 7 = 3l \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Bài 1.87. Cho tam giác ABC có A(3;4), B(2;1), C(-1;-2). Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } S_{ABC} = 3S_{ABM} \Leftrightarrow BC = 3BM \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \pm 3\overrightarrow{BM}$$

$$\text{Gọi } M(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{BM}(x-2; y-1); \overrightarrow{BC}(-3; -3)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -3 = 3(x-2) \\ -3 = 3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -3 = -3(x-2) \\ -3 = -3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn $M_1(1;0), M_2(3;2)$

Bài 1.88. Cho ba điểm A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)

- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
- Xác định tọa độ điểm D biết D thuộc đoạn thẳng BC và $2BD = 5DC$.
- Xác định tọa độ giao điểm của AD và BG trong đó G là trọng tâm tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(1;2), \overrightarrow{AC}(4;1)$. Vì $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

b) Ta có $2\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BD}(x_D; y_D - 1), \overrightarrow{DC}(3 - x_D; -y_D)$

$$\text{Do đó } \begin{cases} 2x_D = 5(3 - x_D) \\ 2(y_D - 1) = 5(-y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{15}{7} \\ y_D = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{15}{7}; \frac{2}{7}\right)$$

c) Ta có $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. Gọi I(x; y) là giao điểm của AD và BG.

Do đó $\overrightarrow{AI}(x+1; y+1), \overrightarrow{AD}\left(\frac{22}{7}; \frac{9}{7}\right)$ cùng phương suy ra

$$\frac{7(x+1)}{22} = \frac{7(y+1)}{9} \Rightarrow 9x - 22y - 13 = 0$$

$\overrightarrow{BI}(x; y-1), \overrightarrow{BG}\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ cùng phương suy ra tồn tại k: $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BG} \Rightarrow y = 1$

$$\text{Từ đó } I\left(\frac{35}{9}; 1\right)$$

Bài 1.89. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng khoảng cách từ P tới hai điểm A và B là nhỏ nhất, biết:

- A(1;1) và B(2;-4)
- A(1;2) và B(3;4)

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy điểm A, B nằm ở hai phía với trục hoành

Ta có $PA + PB \geq AB$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

$$\text{Suy ra } \frac{x_P - 1}{2 - 1} = \frac{0 - 1}{-4 - 1} \Rightarrow x_P = \frac{6}{5} \Rightarrow P\left(\frac{6}{5}; 0\right)$$

b) Dễ thấy A, B cùng phía với trục hoành. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua trục hoành, suy ra A'(1;-2) và $PA = PA'$

Ta có $PA + PB = PA' + PB \geq A'B$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'P}$ cùng phương với $\overrightarrow{A'B}$

$$\text{Suy ra } \frac{x_P - 1}{3 - 1} = \frac{0 + 2}{4 + 2} \Rightarrow x_P = \frac{5}{3} \Rightarrow P\left(\frac{5}{3}; 0\right)$$

Bài 1.90: Cho hình bình hành ABCD có A(-2;3) và tâm I(1;1). Biết điểm K(-1;2) nằm trên đường thẳng AB và điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ. Tìm các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Hướng dẫn giải

I là trung điểm AC nên C(4;-1)

Gọi D(2a;a) $\Rightarrow B(2-2a; 2-a)$

$$\overrightarrow{AK}(1;-1), \overrightarrow{AB}(4-2a;-1-a)$$

Vì $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương nên $\frac{4-2a}{1} = \frac{-1-a}{-1} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow D(2;1), B(0;1)$

Chuyên đề I: ỨNG DỤNG VECTO ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

Phương pháp chung

Để giải một bài toán tổng hợp bằng phương pháp vector ta thường thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Chuyển giả thiết và kết luận của bài toán sang ngôn ngữ của vector, chuyển bài toán tổng hợp về bài toán vector.

Bước 2: Sử dụng các kiến thức vector để giải quyết bài toán đó.

Bước 3: Chuyển kết quả bài toán vector sang kết quả bài toán tổng hợp.

Sau đây là một số dạng toán thường gặp

I. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH VÀ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG CỐ ĐỊNH.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta chứng minh hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, tức là tồn tại số thực k sao cho: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Để chứng minh đường thẳng AB đi qua điểm cố định ta đi chứng minh ba điểm A, B, H thẳng hàng với H là một điểm cố định.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi có hai số thực α, β có tổng bằng 1 sao cho: $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

- * Nếu A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$
 $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$. Đặt $\alpha = 1-k$; $\beta = k \Rightarrow \alpha + \beta = 1$ và $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$.

- * Nếu $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ với $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha$
 $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA}$

Suy ra M, A, B thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho góc xOy. Các điểm A, B thay đổi lần lượt nằm trên Ox, Oy sao cho $OA + 2OB = 3$. Chứng minh rằng trung điểm I của AB thuộc một đường thẳng cố định.

Định hướng: Ta có hệ thức vector xác định điểm I là $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ (*)

Từ ví dụ 1 ta cần xác định hai điểm cố định A', B' sao cho $\overrightarrow{OI} = \alpha\overrightarrow{OA'} + \beta\overrightarrow{OB'}$ với $\alpha + \beta = 1$.

Do đó từ hệ thức (*) ta nghĩ tới việc xác định hai điểm cố định A', B' lần lượt trên Ox, Oy

Ta có (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{OA}{2OA'}\overrightarrow{OA'} + \frac{OB}{2OB'}\overrightarrow{OB'}$. Từ đó ta cần chọn các điểm đó sao cho $\frac{OA}{2OA'} + \frac{OB}{2OB'} = 1$. Kết hợp với giả thiết $OA + 2OB = 3$ ta chọn được

điểm A' và B' sao cho $OA' = \frac{3}{2}, OB' = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Trên Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A', B' sao cho $OA' = \frac{3}{2}, OB' = \frac{3}{4}$.

Do I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{OA}{2OA'}\overrightarrow{OA'} + \frac{OB}{2OB'}\overrightarrow{OB'}$

Ta có $\frac{OA}{2OA'} + \frac{OB}{2OB'} = \frac{OA}{2 \cdot \frac{3}{2}} + \frac{OB}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}(OA + 2OB) = 1$

Do đó điểm I thuộc đường thẳng A'B' cố định.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành ABCD, I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm thuộc đoạn AC thỏa mãn $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Định hướng: Để chứng minh D, E, I thẳng hàng ta đi tìm số k sao cho $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{DI}$, muốn vậy ta sẽ phân tích các vector $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DI}$ qua hai vector không cùng phương $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ và sử dụng nhận xét " $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$ với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector không cùng phương " từ đó tìm được $k = \frac{2}{3}$.

Lời giải (hình 1.35)

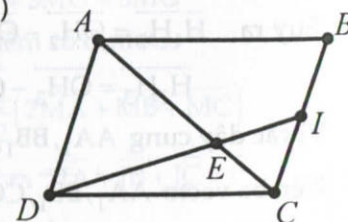
Ta có $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (1)

Mặt khác theo giả thiết ta có $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

Vậy ba điểm D, E, I thẳng hàng.



Hình 1.35

Ví dụ 4: Hai điểm M, N chuyển động trên hai đoạn thẳng cố định BC và BD

$$(M \neq B, N \neq B) \text{ sao cho } 2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN} = 10$$

Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

$$\text{Để thấy luôn tồn tại điểm } I \text{ thuộc } MN \text{ sao cho } 2\frac{BC}{BM}\overrightarrow{IM} + 3\frac{BD}{BN}\overrightarrow{IN} = \vec{0} \quad (1).$$

Gọi H là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{HC} + 3\overrightarrow{HD} = \vec{0} \quad (2)$ do đó H cố định.

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{BC}{BM}\overrightarrow{BM} + 3\frac{BD}{BN}\overrightarrow{BN} = 5\overrightarrow{BH}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{BC}{BM}(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) + 3\frac{BD}{BN}(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IN}) = 5\overrightarrow{BH}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN}\right)\overrightarrow{BI} = 5\overrightarrow{BH} \text{ (theo (1))}$$

$$\Leftrightarrow 10\overrightarrow{BI} = 5\overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} \quad (3)$$

Do các điểm B, H cố định, nên điểm I cố định. (xác định bởi hệ thức (3))

Ví dụ 5: Cho ba dây cung song song AA_1, BB_1, CC_1 của đường tròn (O) .

Chứng minh rằng trực tâm của ba tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1 nằm trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC_1, BCA_1, CAB_1

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}$$

$$\text{và } \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{BB_1}$$

Vì các dây cung AA_1, BB_1, CC_1 song song với nhau

Nên ba vectơ $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ có cùng phương

Do đó hai vectơ $\overrightarrow{H_1H_2}$ và $\overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương hay ba điểm H_1, H_2, H_3 thẳng hàng.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.91: Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm thuộc cạnh AB , N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, AN = \frac{3}{4}AC$. Gọi O là giao điểm của CM và BN . Trên đường thẳng BC lấy E . Đặt $\overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x để A, O, E thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AE} = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$$

$$A, E, O \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AO}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} = \frac{k}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow k = \frac{36}{13}; x = \frac{9}{13}$$

Vậy $x = \frac{9}{13}$ là giá trị cần tìm.

Bài 1.92: Cho $\triangle ABC$ lấy các điểm I, J thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}, 3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng IJ đi qua trọng tâm G của $\triangle ABC$.

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

$$3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} = 5\overrightarrow{IJ}.$$

$$\text{Suy ra } 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 5\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{IG} = 5\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow I, J, G \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 1.93: Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N di động thỏa mãn

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

a) Chứng minh rằng MN đi qua điểm cố định.

b) P là trung điểm của AM . Chứng minh rằng MP đi qua điểm cố định.

Hướng dẫn giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$$

Suy ra M, N, G thẳng hàng hay MN đi qua điểm cố định G .

$$\text{b) } P \text{ là trung điểm } AM \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MN}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

Gọi I là trung điểm BC, J là trung điểm AI suy ra $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

Do đó $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MJ}$ suy ra MP đi qua điểm cố định J .

Bài 1.94: Cho hai điểm M, P là hai điểm di động thỏa mãn

$$\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}.$$

Chứng minh rằng MP đi qua điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC suy ra $a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \vec{0}$

Do đó $\overline{MP} = a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MP} = (a + b + c)\overline{MI}$

Vậy MP đi qua điểm cố định I.

Bài 1.95. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của D qua điểm A, F là điểm đối xứng của tâm O của hình bình hành qua điểm C và K là trung điểm của đoạn OB. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng và K là trung điểm của EF.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\overline{EF} = \frac{5}{2}\overline{AD} + \frac{3}{2}\overline{AB}$, $\overline{EK} = \frac{5}{4}\overline{AD} + \frac{3}{4}\overline{AB}$

$\Rightarrow \overline{EF} = 2\overline{EK}$. Vì vậy K là trung điểm EF.

Bài 1.96: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$; A_2, B_2, C_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 . Gọi G, G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$.

Chứng minh rằng G, G_1, G_2 thẳng hàng và tính $\frac{GG_1}{GG_2}$.

Hướng dẫn giải

Vì G, G_1 là trọng tâm tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ suy ra

$$3\overline{GG_1} = \overline{GA_1} + \overline{GB_1} + \overline{GC_1}$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{GG_1} = \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{GG_1} = \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$$

Tương tự G, G_2 là trọng tâm tam giác ABC, $A_2B_2C_2$ suy ra

$$3\overline{GG_2} = \overline{GA_2} + \overline{GB_2} + \overline{GC_2} \Leftrightarrow 3\overline{GG_2} = \overline{AA_2} + \overline{BB_2} + \overline{CC_2}$$

$$\text{Mặt khác } \overline{AA_2} + \overline{BB_2} + \overline{CC_2} = \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2}$$

Mà A_2, B_2, C_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1

$$\text{Suy ra } 3(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2}) = 3(\overline{A_1B} + \overline{A_1C} + \overline{B_1C} + \overline{B_1A} + \overline{C_1A} + \overline{C_1B})$$

$$= 3(\overline{A_1A} + \overline{AB} + \overline{A_1A} + \overline{AC} + \overline{B_1B} + \overline{BC} + \overline{B_1B} + \overline{BA} + \overline{C_1C} + \overline{CA} + \overline{C_1C} + \overline{CB})$$

$$= 6(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1})$$

$$\text{Do đó } \overline{AA_2} + \overline{BB_2} + \overline{CC_2} = 3(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}) \Rightarrow \overline{GG_2} = \overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$$

$$\text{Vậy } \overline{GG_2} = 3\overline{GG_1}$$

Bài 1.97. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\overline{MB} = \alpha\overline{MC}$, $\overline{NC} = \beta\overline{NA}$, $\overline{PA} = \gamma\overline{PB}$.

Tìm điều kiện của α, β, γ để M, N, P thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \overline{MB} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{BC}; \overline{BP} = \frac{1}{\gamma-1}\overline{AB}; \overline{BC} = (1-\alpha)\overline{MC}; \overline{CN} = \frac{\beta}{1-\beta}\overline{AC};$$

$$\text{Ta có: } \overline{MN} = -\frac{1}{1-\alpha}\overline{AB} + \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta}\right)\overline{AC}$$

$$\text{Và } \overline{MP} = \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\gamma}\right)\overline{AB} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{AC}$$

Để M, N, P thẳng hàng thì ta phải có

$$\frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\gamma}}{-\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}}{\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta}} \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1.$$

Bài 1.98: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng trung điểm hai đường chéo AC, BD và tâm O thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi P, Q, R, S lần lượt là các tiếp điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA đối với đường tròn tâm O.

Đặt $SA = AP = a$, $BP = BQ = b$, $CQ = CR = c$, $DR = DS = d$.

Áp dụng định lý con nhím cho tứ giác ABCD ta có:

$$(a+b)\overline{OP} + (b+c)\overline{OQ} + (c+d)\overline{OR} + (d+a)\overline{OS} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(\frac{b}{a+b}\overline{OA} + \frac{a}{a+b}\overline{OB}\right) + (b+c)\left(\frac{c}{b+c}\overline{OB} + \frac{b}{b+c}\overline{OC}\right) \\ + (c+d)\left(\frac{d}{c+d}\overline{OC} + \frac{c}{c+d}\overline{OD}\right) + (d+a)\left(\frac{a}{d+a}\overline{OD} + \frac{d}{d+a}\overline{OA}\right)$$

$$\Leftrightarrow (b+d)(\overline{OA} + \overline{OC}) + (a+c)(\overline{OB} + \overline{OD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (b+d)\overline{OM} + (a+c)\overline{ON} = \vec{0}$$

Suy ra O, M, N thẳng hàng (đpcm)

Bài 1.99: Cho lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn tâm O thỏa mãn $AB = CD = EF$. Về phía ngoài lục giác dựng các tam giác AMB, BNC, CPD, DQE, ERF, FSA đồng dạng và cân tại M, N, P, Q, R, S. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trọng tâm tam giác MPR và NQS. Chứng minh rằng ba điểm O, O_1, O_2 thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi $M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1, S_1$ lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q, R, S lên AB, BC, CD, DE, EF, FA . Suy ra $M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1, S_1$ lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{PN} &= (\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AS_1} + \overrightarrow{S_1S}) + \\ &+ (\overrightarrow{RR_1} + \overrightarrow{R_1E} + \overrightarrow{EQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q}) + (\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1C} + \overrightarrow{CN_1} + \overrightarrow{N_1N}) \\ &= 2(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{RR_1}) \end{aligned}$$

(Vì theo định lí con nhím thì $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{RR_1} + \overrightarrow{N_1N} + \overrightarrow{Q_1Q} + \overrightarrow{S_1S} = \vec{0}$)

Mặt khác $AB = CD = EF$ suy ra $\frac{MM_1}{OM_1} = \frac{RR_1}{OR_1} = \frac{PP_1}{OP_1} = \frac{1}{k}$

Do đó $\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{PN} = k(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON} = (k+1)(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OO_2} = (k+1)\overrightarrow{OO_1}$$

Hay ba điểm O, O_1, O_2 thẳng hàng.

II. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Để chứng minh đường thẳng AB song song với CD ta đi chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ và điểm A không thuộc đường thẳng CD .
- Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta có thể chứng minh theo hai hướng sau:
 - + Chứng minh mỗi đường thẳng cùng đi qua một điểm cố định.
 - + Chứng minh một đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng còn lại

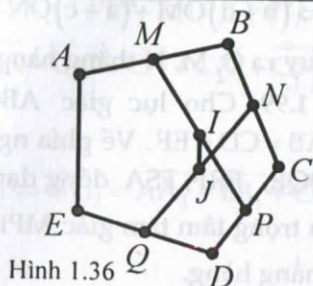
2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP và NQ . Chứng minh rằng IJ song song với AE .

Lời giải (hình 1.36)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} \\ &= \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

Suy ra IJ song song với AE



Hình 1.36

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \gamma\overrightarrow{NC} + \alpha\overrightarrow{NA} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = \vec{0}$ thì AM, BN, CP đồng quy tại O , với O là điểm được xác định bởi $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \beta(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + \gamma(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{MO} = \alpha\overrightarrow{OA}$$

$$\Leftrightarrow (\beta + \gamma)\overrightarrow{MO} = \alpha\overrightarrow{OA}$$

Suy ra M, O, A thẳng hàng hay AM đi qua điểm cố định O

Tương tự ta có BN, CP đi qua O

Vậy ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy.

Ví dụ 3: Cho sáu điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là một tam giác có ba đỉnh lấy trong sáu điểm đó và Δ' là tam giác có ba đỉnh còn lại. Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' đồng quy.

Định hướng. Giả sử sáu điểm đó là A, B, C, D, E, F .

Ta cần chứng minh tồn tại một điểm H cố định sao cho với các cách chọn Δ khác nhau thì H thuộc các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' . Nếu Δ là tam giác ABC thì Δ' là tam giác DEF . Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác DEF .

H thuộc đường thẳng GG' khi có số thực k sao cho $\overrightarrow{HG} = k\overrightarrow{HG'}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) = \frac{k}{3}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{HA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} - \frac{k}{3}\overrightarrow{HD} - \frac{k}{3}\overrightarrow{HE} - \frac{k}{3}\overrightarrow{HF} = \vec{0}$$

Vì vai trò của các điểm A, B, C, D, E, F trong bài toán bình đẳng nên chọn k sao cho $-\frac{k}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = -1$ khi đó $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF} = \vec{0}$

Lời giải

Gọi H là trọng tâm sáu điểm A, B, C, D, E, F khi đó

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF} = \vec{0} (*)$$

Giả sử G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC, DEF suy ra

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}, \overrightarrow{G'D} + \overrightarrow{G'E} + \overrightarrow{G'F} = \vec{0}$$

Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{HG'} + \overrightarrow{G'D} + \overrightarrow{G'E} + \overrightarrow{G'F}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HG'}$$

Do đó GG' đi qua điểm cố định H do đó các đường thẳng nối trọng tâm hai tam giác Δ và Δ' đồng quy.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.100: Cho tứ giác $ABCD$, gọi K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và tam giác BCD . Chứng minh rằng hai đường thẳng KL và AD song song với nhau

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$

Trừ vế với vế ta được

$$\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{LD} + 2\overrightarrow{KL} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LA}) - \overrightarrow{LD} + 2\overrightarrow{KL} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{KL} = \vec{0}$$

Suy ra $KL \parallel AD$

Bài 1.101: Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm

$$A_1, B_1, C_1 \text{ sao cho } \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = k (k > 0).$$

Trên các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 lần lượt lấy các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{1}{k}. \text{ Chứng minh rằng tam giác } A_2B_2C_2 \text{ có các cạnh}$$

tương ứng song song với các cạnh của tam giác ABC .

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{A_2C_2} = \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2} \overrightarrow{AC}, \text{ vì } k^2 - k + 1 > 0 \text{ và } A_2 \notin AC \text{ nên } A_2C_2 \parallel AC$$

Tương tự ta có $B_2C_2 \parallel BC$ và $A_2B_2 \parallel AB$

Bài 1.102: Trên đường tròn cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Qua trọng tâm của ba trong năm điểm đó kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm còn lại. Chứng minh rằng mười đường thẳng nhận được cắt nhau tại một điểm.

Hướng dẫn giải

Giả sử năm điểm đó là A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 nằm trên đường tròn (O) . Ta cần chứng minh tồn tại điểm H thuộc mười đường thẳng đó.

Gọi G là trọng tâm của tam giác $A_1A_2A_3$; P là trung điểm của đoạn thẳng A_4A_5 . Vì $OP \perp A_4A_5$ (do $OA_4 = OA_5$) nên điểm H thuộc đường thẳng đi

qua G và vuông góc với đường thẳng A_4A_5 khi có số thực k sao cho

$$\overrightarrow{HG} = k\overrightarrow{OP}. \text{ Mà } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) \text{ (vì } G \text{ là trọng tâm của tam giác}$$

$$A_1A_2A_3). \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5}) \text{ (vì } P \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } A_4A_5)$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{HG} = k\overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OP}$$

$$\text{Hay } \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) - \overrightarrow{OH} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_3} - \frac{k}{2}\overrightarrow{OA_4} - \frac{k}{2}\overrightarrow{OA_5}$$

Vì các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 trong bài toán có vai trò bình đẳng nên

$$\text{chọn } k \text{ sao cho } -\frac{k}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5})$$

$$\text{Hay } \overrightarrow{OH} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OG} \text{ (} G \text{ là trọng tâm của hệ điểm } \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\} \text{)}.$$

Bài 1.103. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Kẻ MM', NN', PP', QQ' lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC . Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM', NN', PP', QQ' đồng quy tại một điểm. Nhận xét về điểm đồng quy và hai điểm I, O (I là giao điểm của MP và NQ).

Hướng dẫn giải

Ta cần chứng minh tồn tại điểm H thuộc đường thẳng MM', NN', PP', QQ' .

Vì $OP \perp CD$ (do $OC = OD$) nên điểm H thuộc đường thẳng MM' khi có số thực k sao cho $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{OP}$.

Mà M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}); \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{OP} \text{ hay } \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OD}$$

Vì các điểm A, B, C, D trong bài toán có vai trò bình đẳng nên chọn $k = -1$

$$\text{Khi đó } 2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$\text{Hay } 2\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OI} \text{ (Dễ thấy } I \text{ là trọng tâm của tứ giác } ABCD) \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OI}$$

Vậy H là điểm đối xứng của O qua I .

Bài 1.104: Cho năm điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi Δ là một tam giác có ba đỉnh lấy trong năm điểm đó, hai điểm còn lại xác định một đoạn thẳng θ . Chứng minh rằng với các cách chọn Δ khác nhau các đường thẳng nối trọng tâm tam giác Δ và trung điểm đoạn thẳng θ luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi A, B, C là ba đỉnh của tam giác Δ và DE là đoạn thẳng θ . Gọi G là trọng tâm tam giác Δ và M là trung điểm của DE thì với điểm O tùy ý ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{OM}$

Do đó GM luôn đi qua điểm cố định O là trọng tâm hệ điểm A, B, C, D, E.

Bài 1.105: Cho tam giác ABC. Ba đường thẳng x, y, z lần lượt đi qua A, B, C và chúng chia đôi chu vi tam giác ABC.

Chứng minh rằng x, y, z đồng quy.

Hướng dẫn giải

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$

Giả sử đường thẳng x đi qua A cắt BC tại M khi đó ta có

$$AB + BM = AC + MC \Leftrightarrow c + BM = b + MC \Rightarrow c + 2BM = b + (BM + MC)$$

$$\text{Suy ra } BM = \frac{a+b-c}{2}, CM = \frac{a-b+c}{2}$$

$$\text{Do đó: } (a+c-b)\overrightarrow{MB} + (a+b-c)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Tương tự ta có:

$$(a+b-c)\overrightarrow{NC} + (b+c-a)\overrightarrow{NA} = (b+c-a)\overrightarrow{PA} + (a+c-b)\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

Do đó x, y, z đồng quy tại I được xác định bởi

$$(b+c-a)\overrightarrow{IA} + (a+c-b)\overrightarrow{IB} + (a+b-c)\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Bài 1.106: Cho tam giác ABC, các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tương ứng tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Chứng minh AM, BN, CP cùng đi qua một điểm, xác định điểm đó.

Hướng dẫn giải

Giả sử đường tròn bàng tiếp góc A tiếp xúc BC tại M.

Gọi B', C' là tiếp điểm của cạnh AB, AC với đường tròn bàng tiếp góc A

$$\text{Khi đó } AB' = AC' \Leftrightarrow AB + BB' = AC + CC' \Leftrightarrow c + BM = c + CM$$

Đến đây tương tự bài 1.116.

Bài 1.107: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA

a) Gọi G là giao điểm của MP và NQ.

$$\text{Chứng minh rằng } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

b) Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại điểm G.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= 2\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \\ &= 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{b) } 3\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}; 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AG}$ cùng phương hay AA_1 đi qua G

Tương tự ta có BB_1 đi qua G; CC_1 đi qua G; DD_1 đi qua G

Vậy ta có AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại G.

Bài 1.108: Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là một điểm tùy ý. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với M qua các trung điểm I, J, K của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường

$$\text{b) } M, G, O \text{ thẳng hàng và } \frac{MO}{MG} = \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn giải

a) Gọi O là trung điểm CC_1

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB}$$

$$2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} \text{ (vì } AC_1BM \text{ hình bình hành)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AO} \text{ hay O là trung điểm } AA_1$$

Tương tự ta có $\overrightarrow{BB_1} = 2\overrightarrow{BO}$ hay O là trung điểm BB_1

Vậy AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường

b) Ta có: $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$$2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow 2\overrightarrow{MO} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$\Rightarrow M, G, O \text{ thẳng hàng và } \frac{MO}{MG} = \frac{3}{2}$$

Bài 1.109: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, CA, AB. Gọi Δ_a là đường thẳng đi qua trung điểm PN và vuông góc với BC, Δ_b là đường thẳng đi qua trung điểm PM và vuông góc với AC, Δ_c là đường thẳng đi qua trung điểm MN và vuông góc với AB. Chứng minh rằng Δ_a, Δ_b và Δ_c đồng quy.

Hướng dẫn giải

Đặt $\vec{IM} = \vec{e}_1$, $\vec{IN} = \vec{e}_2$, $\vec{IP} = \vec{e}_3$

Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của NP, PM, MN.

O là điểm được xác định $2\vec{IO} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Suy ra $\vec{OX} = \vec{OI} + \vec{IX} = -\frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \frac{1}{2}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = -\frac{1}{2}\vec{e}_1$

Suy ra $OX \perp BC$, tương tự ta có $OY \perp AC$, $OZ \perp AB$

Suy ra Δ_a, Δ_b và Δ_c đồng quy tại O.

Bài 1.110: Cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' sắp xếp sao cho B' thuộc cạnh AB, D' thuộc cạnh AD. Chứng minh rằng các đường thẳng DB', CC', BD' đồng quy.

Hướng dẫn giải

Đặt $\frac{AB'}{AB} = m, \frac{AD'}{AD} = n (0 < m, n < 1)$. Gọi I là giao điểm BD' và DB'

Ta có $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$; $\vec{AC'} = \vec{AB'} + \vec{AD'} = m\vec{AB} + n\vec{AD}$

$$\frac{AD'}{AD} = n \Rightarrow \vec{D'A} = \frac{n}{n-1} \vec{D'D} \Rightarrow \vec{BD'} = \frac{\vec{BA} - \frac{n}{n-1} \vec{BD}}{1 - \frac{n}{n-1}} = \frac{1-n}{1-m} \vec{BB'} + n\vec{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{1-n}{1-m} \vec{IB'} + n\vec{ID} = \vec{0} \Rightarrow \vec{IB'} = \frac{n(m-1)}{1-n} \vec{ID}$$

$$\Rightarrow \vec{AI} = \frac{\vec{AB'} + \frac{n(m-1)}{n-1} \vec{AD}}{1 + \frac{n(m-1)}{n-1}} = \frac{m(n-1)\vec{AB} + n(m-1)\vec{AD}}{mn-1}$$

$$\text{Do đó } \vec{IC} = \vec{AC} - \vec{AI} = \frac{1}{mn-1} ((m-1)\vec{AB} + (n-1)\vec{AD});$$

$$\vec{C'C} = \vec{AC} - \vec{AC'} = (1-m)\vec{AB} + (1-n)\vec{AD}$$

$$\text{Suy ra } \vec{IC} = \frac{1}{mn-1} \vec{C'C}$$

Suy ra I, C', C thẳng hàng $\Rightarrow$ đpcm.

III. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỈ SỐ ĐỘ DÀI ĐOẠN THẲNG.

1. PHƯƠNG PHÁP.

Phân tích vector qua hai vector không cùng phương và sử dụng các kết quả sau:

Cho $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector không cùng phương khi đó

- Với mọi vector $\vec{x}$ luôn tồn tại duy nhất các số thực m, n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$
- $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$
- Nếu $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}, \vec{c'} = m'\vec{a} + n'\vec{b}, m'.n' \neq 0$ và $\vec{c}, \vec{c'}$ là hai vector cùng phương thì $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, AN = \frac{3}{4}AC$. Gọi O là giao điểm của CM và BN. Tính tỉ số $\frac{ON}{BN}$ và $\frac{OM}{CM}$

Lời giải (hình 1.37)

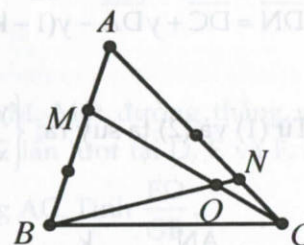
Giả sử $\vec{ON} = n\vec{BN}; \vec{OM} = m\vec{CM}$

Ta có $\vec{AO} = \vec{AM} + \vec{MO} = \vec{AM} - m\vec{CM}$

$$= \vec{AM} - m(\vec{AM} - \vec{AC}) = \frac{1}{3}(1-m)\vec{AB} + m\vec{AC};$$

Và $\vec{AO} = \vec{AN} + \vec{NO} = \vec{AN} - n\vec{BN}$

$$= \vec{AN} - n(\vec{AN} - \vec{AB}) = \frac{3}{4}(1-n)\vec{AC} + n\vec{AB}$$



Hình 1.37

Vì $\vec{AO}$ chỉ có một cách biểu diễn duy nhất qua $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ suy ra

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(1-m) = n \\ \frac{3}{4}(1-n) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{9} \end{cases}$$

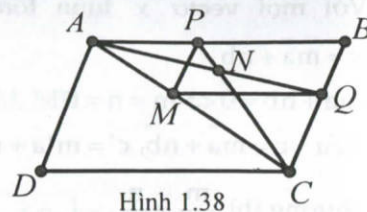
$$\text{Vậy } \frac{ON}{BN} = \frac{1}{9} \text{ và } \frac{OM}{CM} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD. M thuộc đường chéo AC sao cho $AM = kAC$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm P, Q sao cho $MP \parallel BC, MQ \parallel AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP. Tính tỉ số $\frac{AN}{AQ}$ và $\frac{CN}{CP}$ theo k.

Lời giải (hình 1.38)

Đặt $\vec{AN} = x\vec{AQ}, \vec{CN} = y\vec{CP}$, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DN} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{DA} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}) \\ &= \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} + x\frac{BQ}{BC}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - x\frac{BQ}{BC}\overrightarrow{DA}\end{aligned}$$



Hình 1.38

Vì $MQ // AB \Rightarrow \frac{BQ}{BC} = \frac{AM}{AC} = k$ nên $\overrightarrow{DN} = (1 - kx)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{DC} + y(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP})$

$$= \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} + y\frac{BP}{BA}\overrightarrow{BA}$$

Vì $MP // BC \Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{CM}{CA} = \frac{CA - AM}{CA} = 1 - k$ nên

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} - y(1 - k)\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{DA} + (1 + ky - y)\overrightarrow{DC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:
$$\begin{cases} y = 1 - kx \\ x = 1 + ky - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{k^2 - k + 1} \\ y = \frac{1 - k}{k^2 - k + 1} \end{cases}$$

Do đó $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 - k + 1}$ và $\frac{CN}{CP} = \frac{1 - k}{k^2 - k + 1}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AB và AC lấy các điểm B' và C'. Gọi M' là giao điểm của B'C' và AM.

Chứng minh: $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = 2\frac{AM}{AM'}$.

Lời giải (hình 1.39)

Đặt $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB'}$; $\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AC'}$; $\overrightarrow{AM} = z\overrightarrow{AM'}$

Vì $M' \in B'C' \Rightarrow \exists k: \overrightarrow{B'M'} = k\overrightarrow{B'C'}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB'}) = k(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'})$$

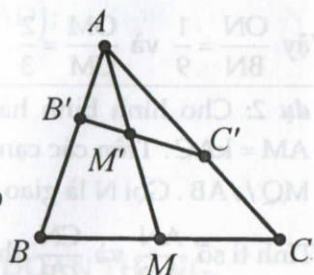
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = (1 - k)\overrightarrow{AB'} + k\overrightarrow{AC'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z}\overrightarrow{AM} = \frac{1 - k}{x}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{y}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1 - k}{x}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{y}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{2z} = \frac{1 - k}{x} = \frac{k}{y} = \frac{1}{x + y} \Rightarrow x + y = 2z$$

Hay $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = 2\frac{AM}{AM'}$ đpcm.

Hình 1.39



3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1.111. Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC ta lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$; $\frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$. Gọi I là giao điểm của AN và CM.

Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{CI} = y\overrightarrow{CM}$

Ta có: $\overrightarrow{AI} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = x\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{BC}$

$$= x\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3x}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{21x}{8}\overrightarrow{AM} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC}$$

Vì M, I, C thẳng hàng nên ta có: $\frac{21}{8}x + \frac{x}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{8}{23} \Rightarrow \frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}$

Tương tự: $\frac{IC}{IM} = \frac{21}{2}$.

Bài 1.112: Cho tam giác ABC và trung tuyến AM. Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM, AC và BC lần lượt tại D, E và F. Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho FG song song AC. Tính $\frac{ED}{GB}$.

Hướng dẫn giải

Ta đặt: $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{CM} = \frac{\vec{b}}{2}\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA} = k\vec{a}$. Vì E nằm ngoài

đoạn thẳng AC nên có số k sao cho $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA} = k\vec{a}$, với $0 < k < 1$. Khi đó $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CB} = k\vec{b}$

Điểm D nằm trên AM và EF nên có hai số x và y sao cho:

$$\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CA} + (1 - x)\overrightarrow{CM} = y\overrightarrow{CE} + (1 - y)\overrightarrow{CF}$$

Hay $x\vec{a} + \frac{1 - x}{2}\vec{b} = ky\vec{a} + k(1 - y)\vec{b}$

Vì hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương nên $x = ky$ và $\frac{1 - x}{2} = k(1 - y)$.

Suy ra $x = 2k - 1$, do đó $\overrightarrow{CD} = (2k - 1)\vec{a} + (1 - k)\vec{b}$

Ta có: $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CE} = (1 - k)(\vec{b} - \vec{a}) = (1 - k)\overrightarrow{AB}$

Chú ý rằng vì $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CB}$ hay $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{AB}$ suy ra $(1 - k)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$

Do đó $\frac{ED}{GB} = 1$

Bài 1.113: Cho $\triangle ABC$ có $AB=3, AC=4$. Phân giác trong AD của góc BAC cắt trung tuyến BM tại I . Tính $\frac{AD}{AI}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{IB}{IM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\overline{IB} + 3\overline{IM} = \vec{0} \Rightarrow 2\overline{AB} + 3\overline{AM} = 5\overline{AI}$ (1)

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\overline{DB} + 3\overline{DC} = \vec{0} \Rightarrow 4\overline{AB} + 3\overline{AC} = 7\overline{AD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$3\overline{AC} - 6\overline{AM} = 7\overline{AD} - 10\overline{AI} \Rightarrow 7\overline{AD} - 10\overline{AI} = \vec{0} \Rightarrow \frac{AD}{AI} = \frac{10}{7}$$

Bài 1.114: Cho tam giác ABC , trên cạnh AC lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm N sao cho: $AM=3MC, NC=2NB$, gọi O là giao điểm của AN và BM . Tính diện tích $\triangle ABC$ biết diện tích $\triangle OBN$ bằng 1.

Hướng dẫn giải

Vì A, O, N thẳng hàng nên: $\overline{BO} = x\overline{BA} + (1-x)\overline{BN}$

Tương tự: $\overline{AO} = y\overline{AM} + (1-y)\overline{AB}$

$$\Rightarrow \overline{AB} = y\overline{AM} + (x-y+1)\overline{AB} + (x-1)\overline{BN}$$

$$\text{hay } (x-y)\overline{AB} + y\overline{AM} + (x-1)\overline{BN} = \vec{0} \quad (1)$$

Đặt $\overline{CB} = \vec{a}, \overline{CA} = \vec{b}$, Ta có: $\overline{AB} = \vec{a} - \vec{b}; \overline{AM} = -\frac{3}{4}\vec{b}; \overline{BN} = -\frac{1}{3}\vec{a}$

$$\text{Thay vào (1) ta có: } (x-y)(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{3}{4}y\vec{b} + (x-y)\left(-\frac{1}{3}\vec{a}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\vec{a} - (x-y)\vec{b} = \frac{x-1}{3}\vec{a} - \frac{3y}{4}\vec{b}$$

Từ đó ta có: $\begin{cases} x-y = \frac{x-1}{3} \\ y-x = \frac{3}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$

Với $x = \frac{1}{10} \Rightarrow \overline{BO} = \frac{1}{10}\overline{BA} + \left(1 - \frac{1}{10}\right)\overline{BN}$

$$\Rightarrow \overline{BO} - \overline{BN} = \frac{1}{10}(\overline{BA} - \overline{BN}) \text{ hay } \overline{NO} = \frac{1}{10}\overline{NA} \Rightarrow \frac{NA}{NO} = 10.$$

Vì $S_{ONB} = 1 \Rightarrow S_{NAB} = 10 \Rightarrow S_{ABC} = 30$

Bài 1.115: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là nằm trên cạnh AB, CD sao cho $AB=3AM, CD=2CN$, G là trọng tâm tam giác MNB và AG cắt BC tại I . Tính $\frac{BI}{BC}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\frac{BI}{BC} = k, k > 0 \Rightarrow \overline{BI} = k\overline{BC}$

Ta có $\overline{AI} = \overline{AB} + \overline{BI} = \overline{AB} + k\overline{BC} = \overline{AB} + k\overline{AD}$

Mặt khác G là trọng tâm tam giác MNB suy ra

$$3\overline{AG} = \overline{AM} + \overline{AN} + \overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AC}) + \overline{AB} \\ = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}(2\overline{AD} + \overline{AB}) + \overline{AB} = \frac{11}{6}\overline{AB} + \overline{AD}$$

Vì $\overline{AG}, \overline{AI}$ cùng phương nên $\frac{11}{6} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{6}{11}$

Bài 1.116: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N .

Biết $OA=1, OB=2, OC=3, OD=4$, tính $\frac{CN}{ND}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overline{OC} = -3\overline{OA}, \overline{OD} = -2\overline{OB}$

Vì $\overline{OM}, \overline{ON}$ cùng phương nên có số thực k sao cho

$$\overline{ON} = k\overline{OM} \Rightarrow \overline{ON} = \frac{k}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$

Đặt $\frac{CN}{ND} = k, k > 0$, ta có $\overline{ON} = -\frac{3}{1+k}\overline{OA} - \frac{2k}{k+1}\overline{OB}$

Suy ra $-\frac{6}{k(1+k)} = -\frac{4k}{k(k+1)} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$

Bài 1.117. Cho tam giác ABC . M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{AMC}$. Một đường thẳng cắt các cạnh AB, AM, AC lần lượt tại B', M', C' phân biệt. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AB'} + 2\frac{AC}{AC'} = 3\frac{AM}{AM'}$

Hướng dẫn giải

Ta có $S_{ABC} = 3S_{AMC} \Rightarrow BC = 3MC \Rightarrow \overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BC}$

Đặt $\overline{AB'} = x\overline{AB}; \overline{AC'} = y\overline{AC}; \overline{AM'} = z\overline{AM}$

Ta có $\overrightarrow{B'M'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB'} = z\overrightarrow{AM} - x\overrightarrow{AB}$

$$= z(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) - x\overrightarrow{AB} = (z-x)\overrightarrow{AB} + \frac{2z}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= (z-x)\overrightarrow{AB} + \frac{2z}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \left(\frac{z}{3} - x\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2z}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'} = y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$$

Mặt khác $\overrightarrow{B'M'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ cùng phương nên $\frac{\frac{z}{3} - x}{-x} = \frac{\frac{2z}{3}}{y} \Leftrightarrow \frac{3}{z} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$

$$\text{Hay } \frac{AB}{AB'} + 2\frac{AC}{AC'} = 3\frac{AM}{AM'}$$

Bài 1.118: Trong đường tròn (O) với hai dây cung AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K.

Chứng minh rằng $\frac{AM^2}{CM^2} = \frac{AK}{CK}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \frac{AK}{CK} = x > 0$$

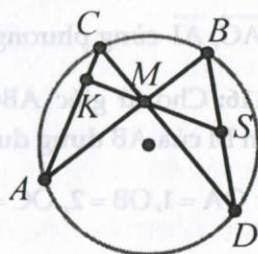
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MK} = \frac{1}{1+x}\overrightarrow{MA} + \frac{x}{1+x}\overrightarrow{MC} \quad (1)$$

$$\text{Do: } \overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MS} \text{ cùng phương nên } \overrightarrow{MK} = l\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) \quad \text{Hình 1.56}$$

$$\text{Mặt khác } MA \cdot MB = MC \cdot MD = a > 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} = -\frac{a}{MA^2}\overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{MD} = -\frac{a}{MC^2}\overrightarrow{MC} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MK} = -\frac{al}{2MA^2}\overrightarrow{MA} - \frac{al}{2MC^2}\overrightarrow{MC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+x} = -\frac{al}{2MA^2} \\ \frac{x}{1+x} = -\frac{al}{2MC^2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{MA^2}{MC^2} \Rightarrow \frac{AM^2}{CM^2} = \frac{AK}{CK}$$



Chương 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ

TỪ 0° ĐẾN 180°

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa

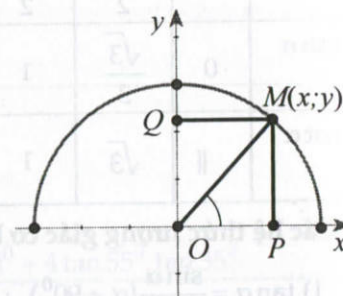
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định

điểm M trên đường nửa đường tròn

đơn vị tâm O sao cho $\alpha = \widehat{xOM}$.

Giả sử điểm M có tọa độ $(x; y)$.



Hình 2.1

Khi đó:

$$\sin \alpha = y; \cos \alpha = x; \tan \alpha = \frac{y}{x} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{x}{y} (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là giá trị lượng giác của góc α .

Chú ý: Từ định nghĩa ta có:

- Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox, Oy khi đó $M(\overline{OP}; \overline{OQ})$.
- Với $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ta có $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$
- Dấu của giá trị lượng giác:

Góc α	0°	90°	180°
$\sin \alpha$	+	+	+
$\cos \alpha$	+	-	-
$\tan \alpha$	+	-	-
$\cot \alpha$	+	-	-

2. Tính chất

• Góc phụ nhau

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

• Góc bù nhau

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

4. Các hệ thức lượng giác cơ bản

$$1) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$2) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$3) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$4) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$5) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$6) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

Chứng minh:

- Hệ thức 1), 2) và 3) dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

- Ta có $\sin \alpha = \overline{OQ}$, $\cos \alpha = \overline{OP}$

$$\text{Suy ra } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 = OQ^2 + OP^2$$

+ Nếu $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ hoặc $\alpha = 180^\circ$ thì dễ dàng thấy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

+ Nếu $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ khi đó theo định lý Pitago ta có

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = OQ^2 + OP^2 = OQ^2 + QM^2 = OM^2 = 1.$$

Vậy ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\text{Mặt khác } 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ suy ra được 5)}$$

$$\text{Tương tự } 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \text{ suy ra được 6)}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC ĐẶC BIỆT.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$$

$$b) B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$$

$$c) C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$$

Lời giải

$$a) A = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$$

$$b) B = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

$$c) C = \sin^2 45^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2(\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ) + 4 \tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$b) B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$c) C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) A &= (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ) \\ &= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B &= (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) \\ &= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) C &= (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ) \\ &= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài 2.1: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \sin 45^\circ + 2 \cos 60^\circ - \tan 30^\circ + 5 \cot 120^\circ + 4 \sin 135^\circ$$

$$b) B = 4a^2 \sin^2 45^\circ - 3(a \tan 45^\circ)^2 + (2a \cos 45^\circ)^2$$

$$c) C = \sin^2 35^\circ - 5 \sin^2 73^\circ + \cos^2 35^\circ - 5 \cos^2 73^\circ$$

$$d) D = \frac{12}{1 + \tan^2 76^\circ} - 5 \tan 85^\circ \cot 95^\circ + 12 \sin^2 104^\circ$$

$$e) E = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$$

$$f) F = \cos^3 1^\circ + \cos^3 2^\circ + \cos^3 3^\circ + \dots + \cos^3 179^\circ + \cos^3 180^\circ$$

Hướng dẫn giải

$$a) A = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}$$

$$b) B = 4a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3a^2 + (\sqrt{2}a)^2 = a^2$$

$$c) C = (\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ) - 5(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) = 1 - 5 = -4$$

$$d) D = 12 \cos^2 76^\circ + 5 \tan 85^\circ \cot 85^\circ + 12 \sin^2 76^\circ = 12 + 5 = 17$$

$$\begin{aligned} e) E &= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + \\ &\quad + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ \\ E &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \frac{1}{2} + 1 \\ E &= \underbrace{1+1+\dots+1}_{44 \text{ số}} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{91}{2} \end{aligned}$$

$$f) F = (\cos^3 1^\circ + \cos^3 179^\circ) + \dots + (\cos^3 89^\circ + \cos^3 91^\circ) + \cos^3 90^\circ + \cos^3 180^\circ$$

$$F = \cos^3 90^\circ + \cos^3 180^\circ = 0 - 1 = -1$$

Bài 2.2: Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$P = 4 \tan(x + 4^\circ) \cdot \sin x \cdot \cot(4x + 26^\circ) + \frac{8 \tan^2(3^\circ - x)}{1 + \tan^2(5x + 3^\circ)} + 8 \cos^2(x - 3^\circ)$$

$$\text{khi } x = 30^\circ$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Thay vào ta có: } P = 4 \tan 34^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cot 146^\circ + \frac{8 \tan^2(-27^\circ)}{1 + \tan^2 153^\circ} + 8 \cos^2 27^\circ$$

$$P = -4 \cdot \tan 34^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot \cot 34^\circ + 8 \tan^2 27^\circ \cdot \cos^2 27^\circ + 8 \cos^2 27^\circ = -2 + 8 = 6$$

DẠNG TOÁN 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC, CHỨNG MINH BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC X, ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$a) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$b) \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

$$c) \frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \sin^4 x + \cos^4 x &= \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \end{aligned}$$

$$b) \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x + 1}{\tan x}}{\frac{\tan x - 1}{\tan x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$$

$$c) \frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x (\tan^2 x + 1) \\ = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC.

Chứng minh rằng $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos \left(\frac{A+C}{2} \right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin \left(\frac{A+C}{2} \right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2$

Lời giải

Vì $A+B+C=180^\circ$ nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos \left(\frac{180^\circ - B}{2} \right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin \left(\frac{180^\circ - B}{2} \right)} - \frac{\cos(180^\circ - B)}{\sin B} \cdot \tan B \\ = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} - \frac{-\cos B}{\sin B} \cdot \tan B = \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + 1 = 2 = VP$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

b) $B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$

Lời giải

a) $A = \cos x - \cos x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 0$

b) $B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} - \sqrt{2} \\ = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2} \\ = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \cot^2 x$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

Lời giải

$$P = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x} \\ = \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} \\ = \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2} \\ = 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 \\ = 3$$

Vậy P không phụ thuộc vào x.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.3. Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

c) $\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x$

d) $\sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x (\cos^2 x - \cot^2 x)$

e) $\frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \cdot \tan^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}$

Hướng dẫn giải

a) $VT = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x (1 + \tan^2 x) - \sin^2 x = VP$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

c) $VT = \tan^3 x (\cot^2 x + 1) - \tan x (\cot^2 x + 1) + \cot^3 x (\tan^2 x + 1) \\ = \tan x + \tan^3 x - \cot x - \tan x + \cot x + \cot^3 x = VP$

d) $VP = \tan^6 x \cos^2 x - \tan^6 x \cot^2 x = \tan^4 x \sin^2 x - \tan^4 x \\ = \tan^4 x \cdot \cos^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x = \tan^2 x - \sin^2 x = VT \text{ (do câu a)}$

e) $VT = \frac{1}{\tan^2 b} - \frac{1}{\tan^2 a} = \cot^2 b - \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 b} - \frac{1}{\sin^2 a} = VP$

Bài 2.4. Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2(180^\circ - x) - \cos^2(180^\circ - x)$

b) $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} - \cos^2 x$

c) $C = \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\cos^2 a + \sin a(\sin a - \cos a)}$

d) $D = \sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} + \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}$

Hướng dẫn giải

a) $A = \tan^2 x + 1 - \tan^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x$

b) $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{1}{\sin^2 x} - 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + 1} - \cos^2 x = \cos^2 x \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos^4 x$

c) $C = \frac{(\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)}{\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a} = \sin a + \cos a$

d) $D^2 = \frac{1+\sin a}{1-\sin a} + \frac{1-\sin a}{1+\sin a} + 2$
 $= \frac{(1+\sin a)^2 + (1-\sin a)^2}{1-\sin^2 a} + 2 = \frac{2+2\sin^2 a}{\cos^2 a} + 2 = \frac{4}{\cos^2 a}$

Suy ra $D = \frac{2}{|\cos a|}$

Bài 2.5. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α . (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$

b) $\cot^2 30^\circ (\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha) + 4 \cos 60^\circ (\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - \sin^6 (90^\circ - \alpha) (\tan^2 \alpha - 1)^3$

c) $(\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$

d) $\frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1}$

Hướng dẫn giải

a) $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$

$= 2(1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) - 3(1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) = -1$

b) $\cot^2 30^\circ (\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha) + 4 \cos 60^\circ (\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - \sin^6 (90^\circ - \alpha) (\tan^2 \alpha - 1)^3$
 $= 3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$

$-2(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^3$
 $= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^3 - (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^3 = 0$

c) $(\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2) = -2$

d) $\frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1} = \frac{2}{3}$

DẠNG TOÁN 3: XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$

b) Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$

c) Cho $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ tính giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Vì $\tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$ mặt khác $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$\text{nên } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8+1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ví dụ 2:

a) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

Lời giải

a) Ta có $A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$$

b) $B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\sqrt{2}(2+1) - (2+1)}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}(2+1)} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3+8\sqrt{2}}$$

Ví dụ 3: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$ b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x + \cos x = m$ nên $m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

$$\text{hay } \sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = (1 + m^2 - 1)(1 - m^2 + 1) = 2m^2 - m^4$$

$$\text{Vậy } A = \sqrt{2m^2 - m^4}$$

b) Ta có $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kết hợp với (*) suy ra

$$(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } |m| \leq \sqrt{2}$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.6: Tính các giá trị lượng giác còn lại, biết

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

b) $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$

d) $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải

a) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\cot \alpha = \frac{4}{3}$

b) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan \alpha = 2$, $\cot \alpha = \frac{1}{2}$

c) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) Ta có $\tan \alpha \cot \alpha = 1 > 0$ mà $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ suy ra $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$

$$\cot \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Bài 2.7.

a) Cho $\sin a = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < a < 180^\circ$. Tính $B = \frac{3\cot a + 2\tan a + 1}{\cot a + \tan a}$

b) Cho $\cot a = 5$. Tính $D = 2\cos^2 a + 5\sin a \cos a + 1$

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết suy ra

$$\cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \cot a = -2\sqrt{2} \Rightarrow B = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$$

b) $\frac{D}{\sin^2 a} = 2\cot^2 a + 5\cot a + \frac{1}{\sin^2 a} \Rightarrow (\cot^2 a + 1)D = 3\cot^2 a + 5\cot a + 1$

Suy ra $D = \frac{101}{26}$

Bài 2.8: Biết $\tan x + \cot x = m$.

a) Tìm $\tan^2 x + \cot^2 x$

b) $\frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x}$

Hướng dẫn giải

a) $\tan^2 x + \cot^2 x = m^2 - 2$

b) $\tan^4 x + \cot^4 x = (\tan^2 x + \cot^2 x)^2 - 2 = (m^2 - 2)^2 - 2 = m^4 - 4m^2 + 2$

$$\Rightarrow \frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x} = \frac{(\tan^2 x + \cot^2 x)(\tan^4 x + \cot^4 x - \tan^2 x \cot^2 x)}{m^4 - 4m^2 + 2} = \frac{(m^2 - 2)(m^4 - 4m^2 + 1)}{m^4 - 4m^2 + 2}$$

Bài 2.9: Cho $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$. Tính $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

Hướng dẫn giải

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \frac{24}{25} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \text{ (do } \cos \alpha > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{91}{125}$$

§2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa:

a) Góc giữa hai vectơ.

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ điểm O bất kỳ dựng các vectơ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$. Số đo góc AOB được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

+ Quy ước: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì ta xem góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tùy ý (từ 0° đến 180°).

+ Kí hiệu: $(\vec{a}; \vec{b})$

b) Tích vô hướng của hai vectơ.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

2. Tính chất: Với ba vectơ bất kì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và mọi số thực k ta luôn có:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) $\vec{a}(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$

3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

4) $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Chú ý: Ta có kết quả sau:

+ Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thì $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

+ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

+ $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2, (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

3. Công thức hình chiếu và phương tích của một điểm với đường tròn.

a) Công thức hình chiếu.

Cho hai vectơ $\vec{AB}, \vec{CD}$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên đường thẳng CD khi đó ta có $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{A'B'} \cdot \vec{CD}$

b) Phương tích của một điểm với đường tròn.

Cho đường tròn (O; R) và điểm M. Một đường thẳng qua M cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Biểu thức $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ được gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn (O; R). Kí hiệu là $P_{M/(O)}$.

Chú ý: Ta có $P_{M/(O)} = \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MO^2 - R^2 = MT^2$ với T là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ điểm M

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

2) $\vec{a} = (x; y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Hệ quả:

+ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

+ Nếu $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC TÍCH VÔ HƯỚNG, GÓC GIỮA HAI VECTƠ.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng: $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$; $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$

Lời giải (hình 2.2)

- a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = 2a^2 \cos(\vec{BA}, \vec{BC}).$$

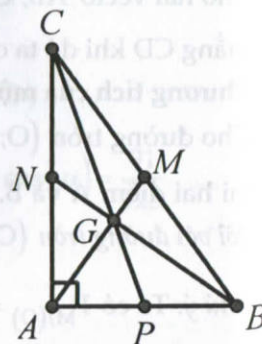
Mặt khác $\cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = \cos \widehat{ABC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

Nên $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = a^2$

- * Ta có $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -\vec{CB} \cdot \vec{CA} = -|\vec{CB}| \cdot |\vec{CA}| \cos \widehat{ACB}$

Theo định lý Pitago ta có $CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$



Hình 2.2

- b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\vec{CA} \cdot \vec{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -a^2$, $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB})$$

Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$

- c) Tương tự cách 2 của câu b vì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ nên

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Để thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

Suy ra $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị các biểu thức sau:

- $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC})$
- $\vec{CG} \cdot (\vec{CA} + \vec{DM})$

Lời giải (hình 2.3)

- a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

Do đó $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC}) = \vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{AC} \cdot \vec{BC}$

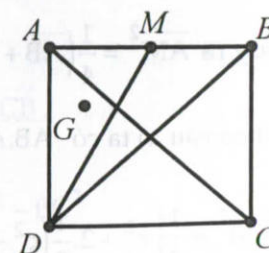
$$= \vec{CA} \cdot \vec{CB} = |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| \cos \widehat{ACB}$$

$(\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$ vì $\vec{AC} \perp \vec{BD})$

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Suy ra $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$



Hình 2.3

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có

$$\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \text{ và}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) &= \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}\right) \\ &= -\frac{5}{4}AB^2 - 4AD^2 = -\frac{21a^2}{4} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

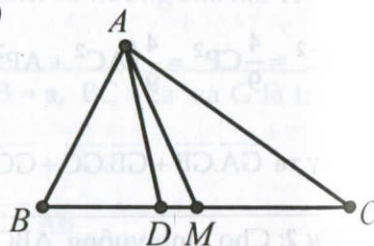
Lời giải (hình 2.3)

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2]$$

$$= \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - CB^2] = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos A = cb \cos A$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) = cb \cos A \text{ hay } \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$



Hình 2.3

b) * Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

$$\text{Theo câu a) ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) \text{ nên}$$

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + b^2\right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$\text{Theo tính chất đường phân giác thì } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC} \overrightarrow{DC} = \frac{b}{c} \overrightarrow{DC} (*)$$

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{b}{c}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = (b\overrightarrow{AB})^2 + 2bc\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (c\overrightarrow{AC})^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = b^2c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + c^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)$$

$$\text{Hay } \overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}P(P-a)$$

Nhận xét: Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{P(P-a)}$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài 2.10. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$

Bài 2.11. Cho tam giác ABC có AB = 5, BC = 7, AC = 8.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho CD = 3. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải

a) $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = AB^2 + AC^2 - BC^2$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20 \Leftrightarrow AB \cdot AC \cdot \cos A = 20 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$$

$$b) \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 8^2 - 20 = 44$$

$$c) \text{Ta có } \overline{AC} \cdot \overline{BC} = AC \cdot BC \cdot \cos C = 44 \Rightarrow \cos C = \frac{11}{14}$$

$$\text{Do đó } \overline{CD} \cdot \overline{CB} = CD \cdot CB \cdot \cos C = 3 \cdot 7 \cdot \frac{11}{14} = \frac{33}{2}$$

Bài 2.12. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|\vec{2a} - \vec{3b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Hướng dẫn giải

$$|\vec{2a} - \vec{3b}| = \sqrt{7} \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 7 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$$

Bài 2.13. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

Hướng dẫn giải

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \vec{u}^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \Leftrightarrow |\vec{u}| = 3, \vec{v}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow |\vec{v}| = 1$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{6}$$

Bài 2.14. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho BM = 1, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho DN = 1 và P là trung điểm BC. Tính $\cos \widehat{MNP}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overline{NM} = \frac{1}{3}\overline{AB} - \overline{AD}, \overline{NP} = \frac{2}{3}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AD}$$

$$\text{Suy ra } \overline{NM} \cdot \overline{NP} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$$

$$\text{Mặt khác } |\overline{NM}| = \sqrt{10}, |\overline{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$$

Bài 2.15. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2. M là điểm được xác định bởi $\overline{AM} = 3\overline{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính $\overline{MB} \cdot \overline{GC}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overline{MB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$$

$$\text{Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên } 3\overline{CG} = \overline{CA} + \overline{CD} + \overline{CM}$$

$$\Rightarrow 3\overline{CG} = -(\overline{AB} + \overline{AD}) - \overline{AB} + \overline{CB} + \overline{BM} = -\frac{9}{4}\overline{AB} - 2\overline{AD}$$

$$\Rightarrow \overline{GC} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}$$

$$\text{Suy ra } \overline{MB} \cdot \overline{GC} = \frac{1}{4}\overline{AB} \cdot \left(\frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}\right) = \frac{3}{8}$$

Bài 2.16. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết AB = CD = 2a, MN = a√3.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \text{ suy ra}$$

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{CD}) \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 2a^2.$$

$$\text{Do đó } \cos(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{2a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overline{AB}, \overline{CD}) = 60^\circ.$$

Bài 2.17: Cho tứ giác ABCD có AB = BC = 2√5, CD = BD = 5√2, BD = 3√10, AC = 10.

Tìm góc giữa hai vector $\overline{AC}, \overline{DB}$.

Hướng dẫn giải

Với điểm O bất kỳ ta có:

$$2\overline{AC} \cdot \overline{DB} = 2(\overline{OC} - \overline{OA})(\overline{OB} - \overline{OD}) = 2\overline{OC} \cdot \overline{OB} + 2\overline{OA} \cdot \overline{OD} - 2\overline{OC} \cdot \overline{OD} - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

$$\text{Mặt khác } 2\overline{OC} \cdot \overline{OB} = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 - (\overline{OC} - \overline{OB})^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{BC}^2$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự thay vào ta tính được

$$2\overline{AC} \cdot \overline{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overline{AC}, \overline{DB}) = \frac{AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2}{AC \cdot BD}$$

Bài 2.18: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1. Gọi D là điểm đối xứng với C qua đường thẳng AB, M là trung điểm của cạnh CB.

a) Xác định trên đường thẳng AC điểm N sao cho tam giác MDN vuông tại D.

Tính diện tích tam giác đó.

b) Xác định trên đường thẳng AC điểm P sao cho tam giác MPD vuông tại M.

Tính diện tích tam giác đó.

c) Tính cosin góc hợp bởi hai đường thẳng MP và PD

Hướng dẫn giải

$$\text{HD: Đặt } \overline{CA} = \vec{a}, \overline{CB} = \vec{b}. \text{ Khi đó } \overline{CD} = \vec{a} + \vec{b}, \overline{CM} = \frac{\vec{b}}{2}, \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

a) Giả sử $\overrightarrow{CN} = n\overrightarrow{CA} = n\vec{a}$. Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} \text{ và } \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CN} = (1-n)\vec{a} + \vec{b}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{ND} = \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right) \cdot \left[(1-n)\vec{a} + \vec{b}\right] = \frac{9-5n}{4} \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{9}{5}\vec{a}$$

Để tam giác MDN vuông tại D ta phải có $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{ND} = 0 \Leftrightarrow n = \frac{9}{5}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MD}^2 = \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}, \overrightarrow{ND}^2 = \left(-\frac{4}{5}\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \frac{21}{25} \Rightarrow S_{MDN} = \frac{7\sqrt{3}}{20}$$

b) Tương tự câu a) ta có $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{5}\vec{a}$, $S_{PMD} = \frac{7\sqrt{3}}{40}$

c) Theo câu a) và b) ta có $\overrightarrow{MD} = \frac{2\vec{a}}{5} + \frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{DD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CP} = \frac{3\vec{a}}{5} + \vec{b}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MP}^2 = \frac{21}{100}, \overrightarrow{PD}^2 = \frac{49}{25}, \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PD} = -\frac{21}{100}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{PD}) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PD}|}{|\overrightarrow{MP}| \cdot |\overrightarrow{PD}|} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

DẠNG TOÁN 2: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vector
- Sử dụng hằng đẳng thức vector về tích vô hướng.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Lời giải:

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào

$$\begin{aligned} \text{ta được } \overrightarrow{VT} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{VP} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (*)}$$

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lý: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \end{aligned}$$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (2)}$$

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ suy ra BH vuông góc với AC

Hay ba đường cao trong tam giác đồng qui (đpcm).

Ví dụ 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}^2$

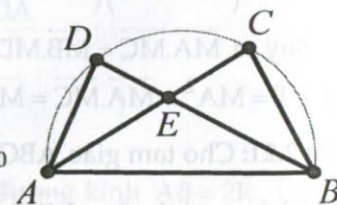
Lời giải (hình 2.4)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{VT} &= \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

Vì AB là đường kính nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$

Suy ra $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{VT} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{VP} \text{ (đpcm).}$$



Hình 2.4

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA}^2 + b\overrightarrow{IB}^2 + c\overrightarrow{IC}^2 = abc$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC})^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2\overrightarrow{IA}^2 + b^2\overrightarrow{IB}^2 + c^2\overrightarrow{IC}^2 + 2ab\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - AB^2) + \\ &\quad + bc(IB^2 + IC^2 - BC^2) + ca(IA^2 + IC^2 - CA^2) = 0 \\ &\Rightarrow (a^2 + ab + ca)IA^2 + (b^2 + ba + bc)IB^2 + \\ &\quad + (c^2 + ca + cb)IC^2 - (abc^2 + ab^2c + a^2bc) = 0 \\ &\Rightarrow (a + b + c)(a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2) = (a + b + c)abc \\ &\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 = abc \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP:**Bài 2.19.** Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF.Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$.*Hướng dẫn giải*

Sử dụng các đẳng thức về trung điểm

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}), \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

Bài 2.20. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \quad \text{b) } MA^2 + MB \cdot MD = 2MA \cdot MO$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } VT = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

$$VP = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{OC}^2$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

$$\text{b) } VT = MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MO} = VP$$

Bài 2.21: Cho tam giác ABC có trực tâm H, M là trung điểm của BC.Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.*Hướng dẫn giải*

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2 = VP \end{aligned}$$

Bài 2.22: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $BC = a, CA = b, AB = c$.Chứng minh rằng: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ *Hướng dẫn giải*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = 0 \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác } 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 - (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})^2 = GA^2 + GB^2 - BA^2$$

$$\text{Tương tự } 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = GB^2 + GC^2 - BC^2, 2\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = GC^2 + GA^2 - AC^2$$

Thay vào (*) suy ra đpcm

Bài 2.23: Cho tam giác ABC có ba đường cao là AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'N} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C'P} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ *Hướng dẫn giải*

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và H là trực tâm của tam giác ABC. M, N, P lần lượt là hình chiếu của O lên các cạnh BC, CA, AB.

Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{A'M} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B'N} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C'P} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\text{Suy ra } VT = \overrightarrow{HO}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{HO} \cdot \vec{0} = VP$$

Bài 2.24. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M là một điểm tùy ý.Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ *Hướng dẫn giải*

Gọi O là tâm hình bình hành khi đó

$$VT = (\overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2) - (\overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OC}^2) = \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

$$VP = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

Từ đó suy ra đpcm

Bài 2.25: Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$.b) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$ theo R.*Hướng dẫn giải*

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AI} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} \text{ (Vì } \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AI}) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NA}) \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI}$$

b) Theo câu a) ta có

$$\overline{AM} \cdot \overline{AI} + \overline{BN} \cdot \overline{BI} = \overline{AB} \cdot \overline{AI} + \overline{BA} \cdot \overline{BI} = \overline{AB}(\overline{AI} - \overline{BI}) = \overline{AB}^2 = 4R^2$$

Bài 2.26. Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC không trùng với B và C. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: $AM^2 = b^2 BM^2 + c^2 CM^2 + (b^2 + c^2 - a^2) BM \cdot CM$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overline{CM} = \frac{AM}{AB} \overline{CB} + \frac{BM}{AB} \overline{CA}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 \cdot CM^2 = AM^2 \cdot CB^2 + BM^2 \cdot CA^2 + 2AM \cdot BM \cdot \overline{CB} \cdot \overline{CA}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 \cdot CM^2 = AM^2 \cdot CB^2 + BM^2 \cdot CA^2 + AM \cdot BM \cdot (a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\text{Vậy } AM^2 = b^2 BM^2 + c^2 CM^2 + (b^2 + c^2 - a^2) BM \cdot CM$$

Bài 2.27. Cho lục giác ABCDEF có AB vuông góc với EF và hai tam giác ACE và BDF có cùng trọng tâm. Chứng minh rằng $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } AB \perp EF \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{EF} = 0 \text{ suy ra } AB^2 + EF^2 = (\overline{AB} + \overline{EF})^2 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác ACE và BDF có cùng trọng tâm nên } \overline{AB} + \overline{CE} + \overline{EF} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } AB^2 + EF^2 = CD^2$$

Bài 2.28. Cho tam giác ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O). Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } MA^2 = (\overline{MO} + \overline{OA})^2 = \frac{2a^2}{3} + 2\overline{MO} \cdot \overline{OA}, \text{ tương tự}$$

$$MB^2 = \frac{2a^2}{3} + 2\overline{MO} \cdot \overline{OB}, MC^2 = \frac{2a^2}{3} + 2\overline{MO} \cdot \overline{OC}$$

$$\text{Suy ra } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$$

Bài 2.29. Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O, R). MN là một đường kính bất kỳ của đường tròn (O; R)

a) Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8R^2$

b) Chứng minh rằng $MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = NA^4 + NB^4 + NC^4 + ND^4$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\overline{MO} + \overline{OA})^2 + (\overline{MO} + \overline{OB})^2 + (\overline{MO} + \overline{OC})^2 + (\overline{MO} + \overline{OD})^2 \\ &= 8R^2 + 2\overline{MO}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) = 8R^2 \end{aligned}$$

$$= 8R^2 + 2\overline{MO}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) = 8R^2$$

b) Cách 1: Theo câu a) ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND^2 = 8R^2$$

$$\Rightarrow (MA^2 - NA^2) + (MB^2 - NB^2) + (MC^2 - NC^2) + (MD^2 - ND^2) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } MA^2 + NA^2 = MB^2 + NB^2 = MC^2 + NC^2 = MD^2 + ND^2 = 4R^2 \quad (2)$$

Nhân hai vế (1) với $4R^2$ và kết hợp (2) ta có

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = NA^4 + NB^4 + NC^4 + ND^4$$

$$\text{Cách 2: } MA^4 = (\overline{MO} + \overline{OA})^4 = (MO^2 + OA^2 + 2\overline{MO} \cdot \overline{OA})^2 = 8R^4 + 32R^2 \overline{MO} \cdot \overline{OA}$$

Thiết lập các đẳng thức tương tự và cộng lại ta có

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = 32R^4 + 32R^2(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) = 32R^4$$

Từ đó suy ra (đpcm)

Bài 2.30 : Cho tứ giác ABCD.

Chứng minh rằng $\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{DC} \cdot \overline{DA} = \vec{0}$ khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình bình hành.

Hướng dẫn giải

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{DC} \cdot \overline{DA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}(\overline{AD} - \overline{BC}) + \overline{CD}(\overline{AD} - \overline{BC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AD} - \overline{BC})(\overline{AB} + \overline{CD}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\overline{AB} + \overline{BD} - \overline{BC})(\overline{AB} + \overline{CD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AB} + \overline{CD})^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình bình hành}$$

Bài 2.31: Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm I và đường tròn (O; R) bất kỳ

chứa I. Các tia $IA_i, i = 1, 6$ cắt (O) tại $B_i (i = 1, 6)$.

$$\text{Chứng minh rằng } IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2 = 6R^2$$

Hướng dẫn giải

Gọi H, J, K lần lượt là hình chiếu của O lên B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 .

Ta có các điểm O, I, H, J, K cùng nằm trên đường tròn đường kính OI.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} \widehat{KJH} = \widehat{KIH} = 60^\circ \\ \widehat{KHJ} = \widehat{KIJ} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle HJK \text{ đều}$$

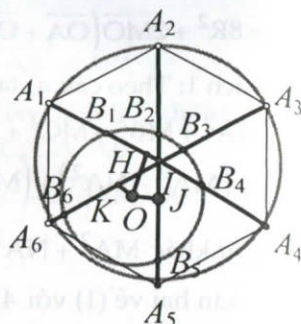
Theo bài 11 ta có $IH^2 + IJ^2 + IK^2 = OH^2 + OJ^2 + OK^2$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} IB_1^2 + IB_4^2 &= (\overline{HB_1} - \overline{HI})^2 + (\overline{HB_4} - \overline{HI})^2 \\ &= HB_1^2 + HB_4^2 - 2\overline{HI}(\overline{HB_1} + \overline{HB_4}) + 2HI^2 \\ &= (OB_1^2 + OH^2) + (OB_4^2 + OH^2) + 2HI^2 \\ &= 2R^2 - 2OH^2 + 2IH^2 \end{aligned}$$

Chúng minh tương tự:

$$\begin{aligned} IB_2^2 + IB_5^2 &= 2R^2 - 2OJ^2 + 2IJ^2, \quad IB_3^2 + IB_6^2 = 2R^2 - 2OK^2 + 2IK^2 \\ \Rightarrow VP &= 6R^2 - 2(OH^2 + OJ^2 + OK^2) + 2(IH^2 + IJ^2 + IK^2) = VT \end{aligned}$$



Hình 2.21

Bài 2.32. Tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng

- a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ với M là điểm bất kỳ
b) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

Hướng dẫn giải

a) $\overline{MA}^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GA}$

Tương tự ta có $\overline{MB}^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GB}$; $\overline{MC}^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GC}$

Suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

b) Cho $M \equiv O$ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Suy ra $3R^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3OG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

Bài 2.33: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^\circ$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là điểm nằm trong tam giác ABC và nằm trên đường tròn đường kính BC. Gọi x, y, z theo thứ tự là diện tích của các tam giác MBC, MCA, MAB.

Chúng minh rằng $(x - y + z)c^2 + (x - z + y)b^2 = \left(x + y + z + \frac{2yz}{x}\right)a^2$

Hướng dẫn giải

Ta có $x \cdot \overline{MA} + y \cdot \overline{MB} + z \cdot \overline{MC} = \vec{0}$ (*)

Gọi E là điểm xác định bởi: $y \cdot \overline{EB} + z \cdot \overline{EC} = \vec{0}$

Khi đó $EB^2 = \frac{z^2 \cdot a^2}{(y + z)^2}$, $EC^2 = \frac{y^2 \cdot a^2}{(y + z)^2}$

Từ (*) suy ra $x \cdot \overline{MA} + (y + z) \cdot \overline{ME} = \vec{0} \Rightarrow (x + y + z) \cdot \overline{AM} = (y + z) \cdot \overline{AE}$

$\Rightarrow (x + y + z)^2 AM^2 = (y + z)^2 AE^2$ (**)

Mà $\begin{cases} c^2 = AB^2 = AE^2 + EB^2 + 2\overline{AE} \cdot \overline{EB} \\ b^2 = AC^2 = AE^2 + EC^2 + 2\overline{AE} \cdot \overline{EC} \end{cases}$

$\Rightarrow yc^2 + zb^2 = (y + z)AE^2 + y \cdot EB^2 + z \cdot EC^2$ (vì $y \cdot \overline{EB} + z \cdot \overline{EC} = \vec{0}$)

$\Rightarrow yc^2 + zb^2 = (y + z)AE^2 + \frac{yz}{y + z}a^2$

Kết hợp với (**) ta được $(x + y + z)^2 AM^2 = (y + z) \cdot y \cdot c^2 + (y + z) \cdot z \cdot b^2 - yz \cdot a^2$

Chúng minh tương tự ta cũng có

$(x + y + z)^2 BM^2 = (z + x) \cdot z \cdot a^2 + (z + x) \cdot x \cdot c^2 - zx \cdot b^2$

$(x + y + z)^2 CM^2 = (x + y) \cdot x \cdot b^2 + (x + y) \cdot y \cdot c^2 - xy \cdot a^2$

Mặt khác M nằm trên đường tròn đường kính BC nên $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = 0$

$\Rightarrow (y \cdot \overline{MB} + z \cdot \overline{MC})^2 = y^2 \cdot MB^2 + z^2 \cdot MC^2$

$\Rightarrow x^2 \cdot MA^2 = y^2 \cdot MB^2 + z^2 \cdot MC^2$

$\Rightarrow x^2(y + z)yc^2 + x^2(y + z)zb^2 - x^2yz \cdot a^2$

$= y^2(z + x)za^2 + y^2(z + x)xc^2 - y^2zxb^2 +$

$+ z^2(x + y)xb^2 + z^2(x + y)ya^2 - z^2xyc^2$

$\Rightarrow xyz[(x - y + z)c^2 + (x - z + y)b^2] = yz(x^2 + xy + xz + 2yz)a^2$

$\Rightarrow (x - y + z)c^2 + (x - z + y)b^2 = \left(x + y + z + \frac{2yz}{x}\right)a^2$ đpcm

DẠNG TOÁN 3: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC TÍCH ĐỘ DÀI.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $|\overline{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R = k$.
- Nếu $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB

- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vector $\vec{a}$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải:

- a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \text{ (Do } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MI = a$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$

- b) Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC.

Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải (hình 2.4)

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Khi đó $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow [(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})] \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2$$

Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC

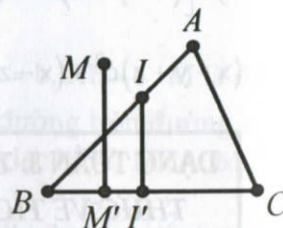
Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC}$ do đó $\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2$

Vì $\overrightarrow{BC}^2 > 0$ nên $\overrightarrow{M'I'}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

$$\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 \Leftrightarrow M'I' \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC$$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC.



Hình 2.4

Ví dụ 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a và số thực k cho trước.

Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$.

Lời giải (hình 2.5)

Gọi I là tâm của hình vuông ABCD

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = k$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + a^2$$

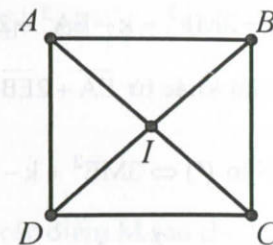
$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + a^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

$$\text{Nếu } k > -a^2 \text{ thì } MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$



Hình 2.5

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.34: Cho đoạn thẳng AB. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

b) $MA^2 + 2MB^2 = k$ với k là số thực dương cho trước.

c) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{a} = k$ với k là số thực cho trước.

Hướng dẫn giải

a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$ (*)

Gọi I là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ thì $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$.

$$\text{Do đó: (*)} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AI.

- b) Gọi E là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$ ta có:

$$MA^2 + 2MB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\overline{ME} + \overline{EA})^2 + (\overline{ME} + \overline{EB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3ME^2 = k - EA^2 - 2EB^2 \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác từ } \overline{EA} + 2\overline{EB} = \vec{0} \Rightarrow EA = \frac{2}{3}AB; EB = \frac{1}{3}AB$$

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow 3ME^2 = k - \frac{2}{3}AB^2 \Leftrightarrow ME^2 = \frac{1}{3}\left(k - \frac{2}{3}AB^2\right)$$

Nếu $k < \frac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Nếu $k = \frac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là một điểm E.

Nếu $k > \frac{2}{3}AB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm E, bán kính

$$R = \sqrt{\frac{1}{3}\left(k - \frac{2}{3}AB^2\right)}.$$

c) Gọi Δ là giá của vectơ $\vec{a}$ và A', M' lần lượt là hình chiếu của A, M lên Δ

Theo công thức hình chiếu ta có $\overline{AM} \cdot \vec{a} = \overline{A'M'} \cdot \vec{a}$

Suy ra $\overline{A'M'} \cdot \vec{a} = k \Leftrightarrow \overline{A'M'} \cdot \vec{a} = k \Leftrightarrow \overline{A'M'} = \frac{k}{a}$ trong đó $\vec{a}$ là độ dài đại số của vectơ $\vec{a}$

Vì A' là điểm cố định, $\frac{k}{a}$ là hằng số không đổi nên M' là điểm cố định

Do đó tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với Δ tại M'.

Bài 2.35: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

a) $(\overline{MA} - \overline{MB})(\overline{2MB} - \overline{MC}) = 0$

b) $(\overline{MA} + 2\overline{MB})(\overline{MB} + 2\overline{MC}) = 0$

c) $2MA^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MC}$

Hướng dẫn giải

a) Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overline{IB} - \overline{IC} = \vec{0}$ ta có:

$$(\overline{MA} - \overline{MB})(\overline{2MB} - \overline{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overline{BA} \cdot \overline{MI} = 0$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua I và vuông góc với AB.

b) Gọi D và E là các điểm thỏa mãn: $\overline{DA} + 2\overline{DB} = \vec{0}$; $\overline{EB} + 2\overline{EC} = \vec{0}$ ta có:

$$(\overline{MA} + 2\overline{MB})(\overline{MB} + 2\overline{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MD} \cdot \overline{ME} = 0$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính DE.

c) Ta có: $2MA^2 + \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA} \cdot \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MA}(\overline{2MA} + \overline{MB} - \overline{MC}) = 0 \quad (*)$

Gọi J là điểm xác định bởi $2\overline{JA} + \overline{JB} - \overline{JC} = \vec{0}$ ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2\overline{MA} \cdot \overline{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} \perp \overline{MJ}$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AJ.

Bài 2.36: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $2MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ b) $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})(\overline{MC} - \overline{MB}) = 3a^2$

Hướng dẫn giải

a) Gọi điểm I thỏa mãn điều kiện $2\overline{IA} + \overline{IB} - \overline{IC} - \overline{ID} = \vec{0}$

$$\text{Ta có: } 2MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2 = (\overline{MI} + \overline{IC})^2 + (\overline{MI} + \overline{ID})^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + 2IA^2 + 2\overline{MI}(2\overline{IA} + \overline{IB} - \overline{IC} - \overline{ID}) + IB^2 - IC^2 - ID^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = IC^2 + ID^2 - 2IA^2 - IB^2 = k$$

+ $k < 0$: Tập hợp điểm M là một tập rỗng

+ $k = 0$: Tập hợp điểm M là điểm I (tức M trùng với I)

+ $k > 0$: Tập hợp điểm M là đường tròn $(I, \sqrt{k})$

b) $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})(\overline{MC} - \overline{MB}) = 3a^2$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có:

$$(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC})(\overline{MC} - \overline{MB}) = 3a^2$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{MG} \cdot \overline{BC} = 3a^2 \Leftrightarrow \overline{MG} \cdot \overline{BC} = a^2$$

Gọi M', G' lần lượt là hình chiếu của M, G lên đường thẳng BC

$$\text{Suy ra } \overline{M'G'} \cdot \overline{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'G' = BC$$

Do G cố định nên G' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC.

Bài 2.37. Cho tứ giác ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập

hợp điểm M sao cho: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MC} \cdot \overline{MD} = \frac{1}{2}IJ^2$.

Hướng dẫn giải

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MC} \cdot \overline{MD} = \frac{1}{2}IJ^2 \Leftrightarrow \overline{MI}^2 + \overline{MJ}^2 - IA^2 - JC^2 = \frac{1}{2}IJ^2$$

Goi K là trung điểm IJ suy ra $\overline{MI}^2 + \overline{MJ}^2 = 2\overline{MK}^2 + 2\overline{IK}^2$

$$\text{Do đó } \overline{MK}^2 = \frac{IA^2 + JC^2}{2}$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm K bán kính $R = \sqrt{\frac{IA^2 + JC^2}{2}}$

Bài 2.38 : Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tìm tập hợp những điểm M sao

$$\text{cho : } \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} = \frac{a^2}{4}$$

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh được $\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} = 3\overline{MO}^2 + a^2$ với O là trọng tâm tam giác

Do đó $\overline{MO} = \frac{a}{2}$ suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{a}{2}$

Bài 2.39 : Cho tam giác ABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc BAC sao cho: $\overline{AB} \cdot \overline{AH} + \overline{AC} \cdot \overline{AK} = \overline{AI}^2$ trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC

Hướng dẫn giải

Sử dụng công thức hình chiếu ta có:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AH} + \overline{AC} \cdot \overline{AK} = \overline{AI}^2 \Leftrightarrow \overline{AI}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} + \overline{AC} \cdot \overline{AK}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AI}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AM} + \overline{AC} \cdot \overline{AM} \Leftrightarrow \overline{AI}^2 = 2\overline{AI} \cdot \overline{AM}$$

Gọi M_0 là hình chiếu của M lên AI khi đó ta có

$$\overline{AI}^2 = 2\overline{AI} \cdot \overline{AM}_0 \Leftrightarrow \overline{AM}_0 = \frac{\overline{AI}}{2} \text{ (} M_0 \text{ nằm trên tia AI)}$$

Suy ra tập hợp điểm M là đoạn trung trực của AI nằm trong góc BAC

Bài 2.40 : Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Gọi I là trung điểm AB ta có: } \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = k \Leftrightarrow 2\overline{MI} \cdot \overline{BA} = k \Leftrightarrow \overline{MI} = \frac{k}{2\overline{BA}}$$

Với M' là hình chiếu M lên AB suy ra M' là điểm cố định

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với AB.

Bài 2.41: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$\alpha \overline{MA}^2 + \beta \overline{MB}^2 + \gamma \overline{MC}^2 = k \text{ với } k \text{ là số cố định cho trước khi:}$$

a) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

b) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Hướng dẫn giải

a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi đó

$$\alpha \overline{MA}^2 + \beta \overline{MB}^2 + \gamma \overline{MC}^2 = k \Leftrightarrow 2\overline{MO}(\alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} + \gamma \overline{OC}) = k$$

$$\text{Đặt } 2(\alpha \overline{OA} + \beta \overline{OB} + \gamma \overline{OC}) = \vec{u} \Rightarrow \vec{u} \neq \vec{0} \text{ do đó } \overline{MO} \cdot \vec{u} = k \Leftrightarrow \overline{MO} = \frac{k}{u}$$

Với M' , O' là hình chiếu M, O lên giá vectơ $\vec{u}$ suy ra M' là điểm cố định

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với giá vectơ $\vec{u}$

b) Gọi I là điểm thỏa mãn $\alpha \overline{IA} + \beta \overline{IB} + \gamma \overline{IC} = \vec{0}$, do $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ nên I tồn tại I và duy nhất

$$\text{Khi đó ta chứng minh được } \overline{MI}^2 = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \left[k - (\alpha \overline{IA}^2 + \beta \overline{IB}^2 + \gamma \overline{IC}^2) \right]$$

DẠNG TOÁN 4: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

• Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó

+ Tích vô hướng hai vectơ là $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

+ Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Chú ý: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

• Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng ta sử dụng công thức

+ Nếu $\vec{a} = (x; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

+ Nếu $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thì $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(9; 8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính góc B của tam giác ABC

c) Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Lời giải:

a) Ta có $\overline{AB}(-3; 4)$, $\overline{AC}(8; 6) \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 0$

Do đó $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\overrightarrow{BC}(11;2)$, $\overrightarrow{BA}(3;-4)$

$$\text{Suy ra } \cos B = \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{11 \cdot 3 + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{11^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

c) Gọi $H(x;y)$ là hình chiếu của A lên BC.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH}(x-1;y-2), \overrightarrow{BH}(x+2;y-6), \overrightarrow{BC}(11;2)$$

$$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0$$

$$\text{Hay } 11x + 2y - 15 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương nên } \frac{x+2}{11} = \frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x = \frac{1}{5}, y = \frac{32}{5}$$

$$\text{Vậy hình chiếu của A lên BC là } H\left(\frac{1}{5}; \frac{32}{5}\right)$$

Ví dụ 2: Cho hình thoi ABCD có tâm I(1;1), đỉnh A(3;2) và đỉnh B nằm trên trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Lời giải:

Vì B nằm trên trục hoành nên giả sử $B(0;y)$

Vì I là tâm hình thoi ABCD nên I là trung điểm của AC và BD

$$\text{Suy ra } C = (2x_I - x_A; 2y_I - y_A) = (-1;0), D = (2x_I - x_B; 2y_I - y_B) = (2;2-y)$$

$$\text{Do đó } AB = AD \Leftrightarrow AB^2 = AD^2 \Leftrightarrow 9 + (y-2)^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow y = 3$$

$$\text{Vậy } B(0;3), C(-1;0), D(2;-1)$$

Ví dụ 3: Cho ba điểm A(3;4), B(2;1) và C(-1;-2). Tìm điểm M trên đường thẳng BC để góc $\widehat{AMB} = 45^\circ$

Lời giải:

$$\text{Giả sử } M(x;y) \text{ suy ra } \overrightarrow{MA}(3-x;4-y), \overrightarrow{MB}(2-x;1-y), \overrightarrow{BC}(-3;-3)$$

$$\text{Vì } \widehat{AMB} = 45^\circ \text{ suy ra } \left| \cos \widehat{AMB} \right| = \left| \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) \right|$$

$$\Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3(3-x) - 3(4-y)|}{\sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} \sqrt{9+9}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} = |x+y-7| \quad (*)$$

Mặt khác M thuộc đường thẳng BC nên hai vector $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương

$$\text{Suy ra } \frac{2-x}{-3} = \frac{1-y}{-3} \Leftrightarrow x = y + 1 \text{ thế vào (*) ta được}$$

$$\sqrt{(2-y)^2 + (4-y)^2} = |2y-6| \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ hoặc } y = 4$$

+ Với $y = 2 \Rightarrow x = 3$, ta có

$$\overrightarrow{MA}(0;2), \overrightarrow{MB}(-1;-1) \Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Khi đó $\widehat{AMB} = 135^\circ$ (không thỏa mãn)

+ Với $y = 4 \Rightarrow x = 5$, $\overrightarrow{MA}(-2;0), \overrightarrow{MB}(-3;-3) \Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB} = 45^\circ$

Vậy $M(5;4)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 4: Cho điểm A(2; 1). Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm tọa độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với $b \geq 0$, $c > 0$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB}(b-2;-1), \overrightarrow{AC}(-2;c-1)$$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A

$$\text{nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2) - 1 \cdot (c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b + 5$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + (c-1)^2} \\ &= (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } c > 0 \text{ nên } -2b + 5 > 0 \Rightarrow 0 \leq b < \frac{5}{2}$$

$$\text{Xét hàm số } y = x^2 - 4x + 5 \text{ với } 0 \leq x < \frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên

x	0	2	$\frac{5}{2}$
y	5	1	$\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$ là $y = 5$ khi $x = 0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b = 0$, suy ra $c = 5$.

Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ là điểm cần tìm.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.42: Cho hai vectơ $\vec{a}(0;4)$; $\vec{b}(4;-2)$

a) Tính cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

b) Xác định tọa độ của vectơ $\vec{c}$ biết $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{c} = -1$ và $(-\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \vec{a} = 6$

Hướng dẫn giải

$$a) \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-8}{4 \cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

b) Gọi $\vec{c}(x; y)$, ta có $\vec{a} + 2\vec{b} = (8; 0)$, $-\vec{b} + 2\vec{c} = (2x - 4; 2y + 2)$

$$\text{Suy ra } (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{c} = -1 \Leftrightarrow 8x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8},$$

$$(-\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \vec{a} = 6 \Leftrightarrow 4(2y + 2) = 6 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó } \vec{c}\left(-\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}\right)$$

Bài 2.43: Cho tam giác ABC có $A(5;3)$, $B(2;-1)$, $C(-1;5)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC

b) Tính tọa độ chân đường cao vẽ từ A.

c) Tính diện tích tam giác ABC

Hướng dẫn giải

a) Gọi $H(x; y)$ là trực tâm tam giác ABC

$$\overline{AH}(x-5; y-3), \overline{BC}(-3; 6), \overline{BH}(x-2; y+1), \overline{AC}(-6; 2)$$

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{BH} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 3x - y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3; 2)$$

b) Gọi $A'(x; y)$ là tọa độ chân đường cao vẽ từ A

$$\text{Ta có } \overline{AA'} \perp \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AA'} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Và } \overline{BA'}(x-2; y+1), \overline{BC} \text{ cùng phương nên } 2x + y - 3 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x = y = 1 \Rightarrow A'(1; 1)$$

$$c) \text{ Ta có } \overline{AA'} = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{BC} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{1}{2} \overline{AA'} \cdot \overline{BC} = 15$$

Bài 2.44: Cho tam giác ABC với $A(3;1)$, $B(-1;-1)$, $C(6;0)$.

a) Tính góc A của tam giác ABC

b) Tính tọa độ giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC.

Hướng dẫn giải

$$a) \overline{AB}(-4;-2), \overline{AC}(3;-1) \Rightarrow \cos A = \cos(\overline{AB}; \overline{AC}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Suy ra } A = 135^\circ$$

b) Gọi $M(x; y)$ là giao điểm của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính OC

$$\text{Ta có } \overline{MA}(3-x; 1-y), \overline{MB}(-1-x; -1-y), \overline{MC}(6-x; -y), \overline{MO}(-x; -y)$$

$$\begin{cases} MA \perp MB \\ MC \perp MO \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \\ \overline{MC} \cdot \overline{MO} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy có hai giao điểm là } M_1(1; -\sqrt{5}), M_2(1; \sqrt{5})$$

Bài 2.45: Cho ba điểm $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có $O(x_0; y_0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi

$$OA = OB = OC \Leftrightarrow \begin{cases} OA^2 = OB^2 \\ OA^2 = OC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (6-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = (-3-x_0)^2 + (6-y_0)^2 \\ (6-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = (1-x_0)^2 + (-2-y_0)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12x_0 - 6y_0 = 6x_0 - 12y_0 \\ -12x_0 - 6y_0 + 40 = -2x_0 + 4y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow O(1; 3)$$

Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $O(1; 3)$

Cách khác: Ta thiết lập hệ phương trình từ điều kiện $\begin{cases} \overline{OM} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{ON} \cdot \overline{CA} = 0 \end{cases}$ trong đó

M, N lần lượt là trung điểm của BC, CA.

Bài 2.46. Các điểm $B(-1;3)$, $C(3;1)$ là hai đỉnh của một tam giác ABC vuông cân tại A . Tìm tọa độ đỉnh A .

Hướng dẫn giải

Gọi $A(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-1-x;3-y)$, $\overrightarrow{AC}(3-x;1-y)$

Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy có hai điểm thỏa mãn $A_1(2;4)$, $A_2(0;0)$

Bài 2.47: Cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$, $D(-3;-5)$. Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(8;4)$, $\overrightarrow{AD}(5;-5)$, $\overrightarrow{CB}(-2;4)$, $\overrightarrow{CD}(-5;-5)$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}} = 0$$

Do đó $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác nội tiếp được.

Bài 2.48: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-2;-1)$, $B(2;-4)$.

a) Tìm trên trục Oy điểm M sao cho $\widehat{MBA} = 45^\circ$.

b) Tìm trên trục Ox điểm N sao cho $NA = NB$

Hướng dẫn giải

a) $M \in Oy \Rightarrow M(0;y)$ Do đó ta có:

$$\overrightarrow{BM} = (-2; y+4) \Rightarrow |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{y^2 + 8y + 20}$$

$$\overrightarrow{BA} = (-4;3) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = 5$$

Do đó ta có: $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = 3y + 20$

$$\text{Ta có: } \widehat{MBA} = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 3y + 20 = 5 \cdot \sqrt{y^2 + 8y + 20} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{30}{7} \\ y = 10 \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M_1 = \left(0; -\frac{30}{7}\right)$; $M_2 = (0;10)$.

Bài 2.49: Cho hai điểm $A(4;-3)$, $B(3;1)$. Tìm M trên trục hoành sao cho

$$\widehat{AMB} = 135^\circ.$$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(a;0)$; $\overrightarrow{MA} = (4-a;-3)$; $\overrightarrow{MB} = (3-a;1)$

$$\cos \widehat{AMB} = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} = \frac{a^2 - 7a + 9}{\sqrt{(a-4)^2 + 9} \cdot \sqrt{(a-3)^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 7a + 9 < 0 \quad (*) \\ 2(a^2 - 7a + 9)^2 = (a^2 - 8a + 25)(a^2 - 6a + 10) \quad (**) \end{cases}$$

Ta có: $(**) \Leftrightarrow a^4 - 14a^3 + 51a^2 - 22a - 88 = 0$

$$\Leftrightarrow (a-4)(a+1)(a^2 - 11a + 22) = 0 \Leftrightarrow a = 4, a = -1 \text{ hoặc } a = \frac{11 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Thử nghiệm trên với đk $(*)$ ta chỉ nhận $a = 4$; $a = \frac{11 - \sqrt{33}}{2}$

Từ đó ta có 2 điểm M thỏa mãn là $M_1(4;0)$; $M_2\left(\frac{11 - \sqrt{33}}{2}; 0\right)$

Bài 2.50: Biết $A(1;-1)$, $B(3;0)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D

Hướng dẫn giải

Giả sử $C(x;y)$. Ta có:

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $C(4;-2)$, $D(2;-3)$ hoặc $C(2;2)$, $D(0;1)$

Bài 2.51. Trong mặt phẳng tọa độ cho ba điểm $A(1;4)$, $B(-2;-2)$ và $C(4;2)$.

Xác định tọa độ điểm M sao cho tổng $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} &MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 \\ &= (x-1)^2 + (y-4)^2 + 2[(x+2)^2 + (y+2)^2] + 3[(x-4)^2 + (y-2)^2] \\ &= 6x^2 - 18x + 6y^2 + 93 = \frac{3}{2}(2x-3)^2 + 6(y-1)^2 + \frac{147}{2} \geq \frac{147}{2} \end{aligned}$$

Suy ra $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$

§3 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. **Định lí côsin:** Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$. Ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

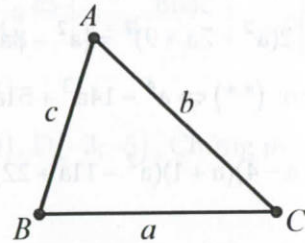
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



Hình 2.6

2. **Định lí sin:** Trong tam giác ABC với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán

kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

3. **Độ dài trung tuyến:** Cho tam giác ABC với m_a , m_b , m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C. Ta có:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

4. Diện tích tam giác

Với tam giác ABC ta kí hiệu h_a , h_b , h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB; R , r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác; $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác; S là diện tích tam giác. Khi đó ta có:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$= \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{công thức Hê-rông})$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC.

1. PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định lí côsin và định lí sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC, và độ dài đường cao kẻ từ A.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 29$$

$$\text{Suy ra } BC = \sqrt{29}$$

$$\text{Vì } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ nên } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Theo công thức tính diện tích ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 8 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot h_a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$$

$$\text{Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là } h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

$$\text{Ta có } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

$$\text{Theo định lí sin ta có } a = 2R \sin A = 2 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 3,$$

$$b = 2R \sin B = 2 \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$c = 2R \sin C = 2 \cdot 3 \cdot \sin 105^\circ \approx 5,796$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2} \cdot 5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC.

Biết $AB = 3$, $BC = 8$, $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Tính độ dài cạnh AC và góc lớn nhất của tam giác ABC.

Lời giải (hình 2.7)

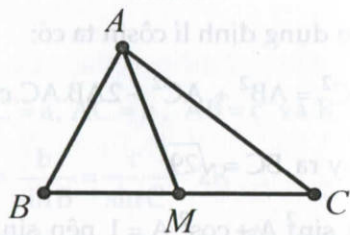
$BC = 8 \Rightarrow BM = 4$. Đặt $AM = x$

Theo định lí cosin ta có

$$\cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM}$$

Suy ra $\frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{x^2 + 16 - 9}{2 \cdot 4 \cdot x}$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 20\sqrt{13}x + 91 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{13} \\ x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$



Hình 2.7

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

TH1: Nếu $x = \sqrt{13} \Rightarrow 13 = \frac{2(3^2 + AC^2) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = 7$.

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí cosin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{9 + 49 - 64}{2 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{1}{7}$$

Suy ra $A \approx 98^\circ 12'$

TH2: Nếu $x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \frac{49}{13} = \frac{2(3^2 + AC^2) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{397}{13}}$

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí cosin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{9 + \frac{397}{13} - 64}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{397}{13}}} = -\frac{53}{\sqrt{5161}}$$

Suy ra $A \approx 137^\circ 32'$

Ví dụ 4: Cho hình chữ nhật ABCD biết $AD = 1$. Giả sử E là trung điểm AB và thỏa mãn $\sin \widehat{BDE} = \frac{1}{3}$.

Tính độ dài cạnh AB.

Lời giải (hình 2.8)

Đặt $AB = 2x$ ($x > 0$) $\Rightarrow AE = EB = x$.

Vì góc BDE nhọn nên $\cos \widehat{BDE} > 0$ suy ra

$$\cos \widehat{BDE} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{BDE}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Theo định lí Pitago ta có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 1 + x^2 \Rightarrow DE = \sqrt{1 + x^2}$$

$$BD^2 = DC^2 + BC^2 = 4x^2 + 1 \Rightarrow BD = \sqrt{4x^2 + 1}$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác BDE ta có

$$\cos \widehat{BDE} = \frac{DE^2 + DB^2 - EB^2}{2DE \cdot DB} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4x^2 + 2}{2\sqrt{(1+x^2)(4x^2+1)}}$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (Do } x > 0)$$

Vậy độ dài cạnh AB là $\sqrt{2}$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.52: Cho tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính cạnh BC.

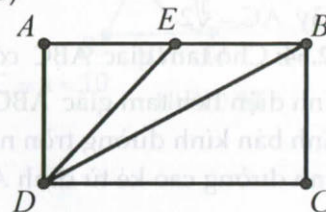
Hướng dẫn giải

Đặt $BC = x$ ($x > 0$). $MN = 3 \Rightarrow AC = 6$.

Theo định lí cosin ta có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos C$

Hay $81 = 36 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3(1 + \sqrt{6})$

Bài 2.53: Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1$. Trên tia đối của AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Giả sử $\widehat{CBD} = 30^\circ$. Tính AC.



Hình 2.8

Hướng dẫn giải

Đặt $AC = x$ ($x > 0$)

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABD ta có

$$BD^2 = 1 + (1+x)^2 - 2(1+x) \cdot \frac{1}{x}$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác BCD ta có $BD = \frac{1}{\sin 30^\circ} \sin \widehat{BCD} = \frac{2}{x}$

Suy ra ta được phương trình:

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^3 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Vậy $AC = \sqrt[3]{2}$

Bài 2.54: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 7$, $BC = 8$.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác

c) Tính đường cao kẻ từ đỉnh A.

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng công thức Hê - rông ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6\sqrt{3}$

b) Áp dụng công thức tính diện tích $S = \frac{abc}{4R}$ và $S = pr$ suy ra

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}, r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$c) h_a = \frac{2S}{a} = \frac{12\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Bài 2.55: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{2c}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

a) Tính các góc của tam giác.

b) Cho $a = 2\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

$$\text{HD: a) Đặt } \frac{a}{\sqrt{3}} = t > 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}t, b = \sqrt{2}t, c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}t$$

Áp dụng định lý cosin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2t^2 + (2-\sqrt{3})t^2 - 3t^2}{2(\sqrt{3}-1)t^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3t^2 + (2-\sqrt{3})t^2 - 2t^2}{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ, C = 15^\circ$$

b) Áp dụng định lý sin, ta có: $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin 120^\circ} = 2$.

Bài 2.56: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $a = 10$, $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính R

b) Tính b, c

Hướng dẫn giải

$$a) 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

b) Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA và AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ta có

$$AP = AN - r \cdot \cot 30^\circ = 5, BP + NC = BM + MC = a = 10$$

$$\Rightarrow (b - AN) + (c - AP) = 10 \Rightarrow b + c = 20 \quad (1).$$

Theo định lý cosin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ \Rightarrow bc = \frac{(b+c)^2 - a^2}{3} = 100 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra b, c là nghiệm của phương trình $x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Vậy $b = c = 10 \Rightarrow \triangle ABC$ đều.

Bài 2.57: Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 4$ và $\hat{A} = 60^\circ$.

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính tan C

c) Lấy điểm D trên tia đối của tia AB sao cho $AD = 6$ và điểm E trên tia AC sao cho $AE = x$. Tìm x để BE là tiếp tuyến của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ADE

Hướng dẫn giải

a) Theo định lý cosin ta có

$$BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cos 60^\circ = 76$$

$$\Rightarrow BC \approx 8,72$$

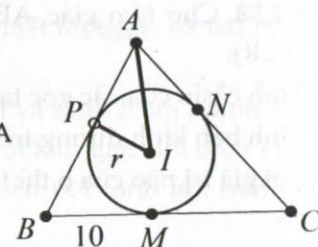
$$\text{Suy ra chu vi tam giác là } 2p \approx 10 + 4 + 8,72 = 22,72$$

b) Kẻ đường cao BH ta có

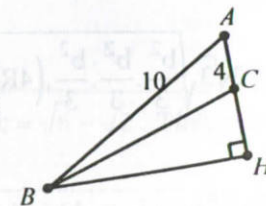
$$AH = AB \cos 60^\circ = 5 \Rightarrow HC = 5 - 4 = 1.$$

$$BH = AB \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } \tan C = -\tan \widehat{BCH} = -\frac{HB}{HC} = -5\sqrt{3}$$



Hình 2.22



Hình 2.23a

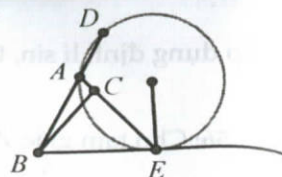
c) Để BE là tiếp tuyến đường tròn (C) ta phải có

$$BE^2 = BA \cdot BD = 10(10 + 6) = 160.$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABE ta có

$$BE^2 = x^2 + 100 - 10x \Rightarrow x^2 - 10x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x = 5 + \sqrt{85}$$



Hình 2.23b.

Bài 2.58. Cho tam giác ABC cân có cạnh bên bằng b và nội tiếp đường tròn (O;R).

a) Tính cosin của các góc tam giác.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

c) Với giá trị nào của b thì tam giác có diện tích lớn nhất?

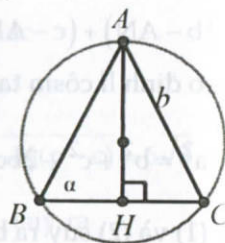
Hướng dẫn giải

a) Giả sử tam giác cân tại đỉnh A. Đặt $\hat{B} = \hat{C} = \alpha \Rightarrow \alpha < 90^\circ$

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{b}{2R} \Rightarrow \cos B = \cos C = \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}}$$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{b^2 - 2R^2}{2R^2}$$

$$b) S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2b \cos \alpha \cdot b \sin \alpha = \frac{b^3 \sqrt{4R^2 - b^2}}{4R^2}$$



Hình 2.24

$$\text{Chu vi tam giác là } 2p = 2b + 2b \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}$$

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác } r = \frac{S}{p} = \frac{b^2 \sqrt{4R^2 - b^2}}{2R(2R + \sqrt{4R^2 - b^2})}$$

c) Ta phải tìm b để $y = b^3 \sqrt{4R^2 - b^2}$ đạt GTLN

Áp dụng BDT Cauchy cho bốn số ta có

$$y = 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{b^2}{3} \cdot \frac{b^2}{3} \cdot \frac{b^2}{3} \cdot (4R^2 - b^2)} \leq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{\frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + (4R^2 - b^2)}{4}}^4 = 3\sqrt{3}R^4$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{b^2}{3} = 4R^2 - b^2 \Leftrightarrow b = R\sqrt{3}.$$

DẠNG TOÁN 2: GIẢI TAM GIÁC.

1. PHƯƠNG PHÁP.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lí cosin và định lí sin ; định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $\hat{A} = 87^\circ$.

Lời giải

Theo định lí cosin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot \sin 87^\circ$
Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lí sin ta có: $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{32 \sin 87^\circ}{53,8} \Rightarrow \hat{B} \approx 36^\circ$

Suy ra $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 180^\circ - 87^\circ - 36^\circ = 57^\circ$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$ và $c = 14$.

Lời giải

Ta có $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $c < b < a$ suy ra $\hat{C} < \hat{B} < \hat{A}$ do đó góc A là lớn nhất.

Theo định lí cosin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 12^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\hat{A} = 120^\circ$

Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120° .

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.59: Giải tam giác ABC biết

- a) $a = 2, b = 3, c = 4$. b) $a = 12; c = 8,2$ và $\hat{A} = 110^\circ$.

Hướng dẫn giải

a) Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8} \Rightarrow \hat{A} \approx 28^\circ 57'$$

$$\cos B = \frac{2^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{11}{16} \Rightarrow \hat{B} \approx 46^\circ 34'$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 104^\circ 29'$$

b) Theo định lí sin ta có

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{8,2 \cdot \sin 110^\circ}{12} \Rightarrow \hat{C} \approx 39^\circ 57' \text{ hoặc } \hat{C} \approx 180^\circ - 39^\circ 57' = 140^\circ 3'$$

Vì góc A tù nên góc C nhọn do đó $\hat{C} \approx 39^\circ 57'$

$$\text{Suy ra } \hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} \approx 180^\circ - 110^\circ - 39^\circ 57' = 33^\circ 3'$$

$$\text{Mặt khác } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{12 \cdot \sin 33^\circ 3'}{\sin 110^\circ} \approx 6,96$$

Bài 2.60: Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 109; \hat{B} = 33^\circ 24'; \hat{C} = 66^\circ 59'$

b) $a = 20; b = 13; \hat{A} = 67^\circ 23'$

Hướng dẫn giải

a) $\hat{A} = 180^\circ - (33^\circ 24' + 66^\circ 59') = 79^\circ 37'$

$$b = \frac{a \cdot \sin 33^\circ 24'}{\sin 79^\circ 37'} \approx 61; \quad c = \frac{a \cdot \sin 66^\circ 59'}{\sin 79^\circ 37'} \approx 102$$

b) $\sin B = \frac{13 \cdot \sin 67^\circ 23'}{20} \approx 0,6$

$$\text{Vì } b < a \Rightarrow \hat{B} < \hat{A} \Rightarrow \hat{B} \approx 36^\circ 52'; \hat{C} \approx 75^\circ 45'; c = \frac{20 \cdot \sin 75^\circ 45'}{\sin 67^\circ 23'} \approx 21$$

Bài 2.61: Giải tam giác ABC, biết:

a) $b = 4,5; \hat{A} = 30^\circ; \hat{C} = 75^\circ$

b) $b = 14; c = 10; \hat{A} = 145^\circ$

c) $a = 14; b = 18; c = 20$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4,5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow a \approx 2,33$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{4,5 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow c \approx 4,5$$

b) Theo định lí côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 14^2 + 10^2 - 2 \cdot 14 \cdot 10 \cdot \cos 145^\circ$$

Suy ra $a \approx 22,92$

$$\text{Theo định lí sin ta có: } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{14 \sin 145^\circ}{22,92} \approx 0,35 \Rightarrow \hat{B} \approx 20^\circ 29'$$

$$\text{Suy ra } \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 180^\circ - 145^\circ - 20^\circ 29' = 14^\circ 31'$$

c) Áp dụng định lí côsin ta có:

$$\cos A = \sqrt{\frac{11}{15}} \Rightarrow A \approx 31^\circ 5'; \cos B = \sqrt{\frac{17}{35}} \Rightarrow B \approx 45^\circ 49'; \cos C = \sqrt{\frac{5}{21}} \Rightarrow C \approx 50^\circ 47'$$

Bài 2.62: Cho ΔABC ta có $a = 13, b = 4$ và $\cos C = -\frac{5}{13}$. Tính bán kính đường

tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

Hướng dẫn giải

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 13^2 + 4^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = 225 \Rightarrow c = 15$$

$$\sin C = \frac{12}{13} \Rightarrow R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{15}{2 \cdot \frac{12}{13}} = \frac{65}{8}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 4 \cdot \frac{12}{13} = 24; \quad p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{13 + 4 + 15}{2} = 16$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

DẠNG TOÁN 3: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN CÁC YẾU TỐ CỦA TAM GIÁC, TỨ GIÁC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi về này thành về kia, hai về cùng bằng một về hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, bunhiacôpxki,...)

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ (đpcm)

b) Áp dụng định lí cosin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

Lời giải (hình 2.9)

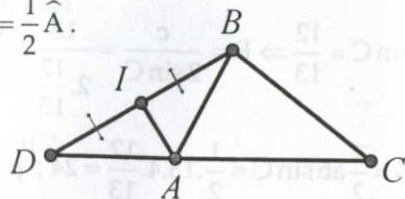
a) Trên tia đối của tia AC lấy D thỏa $AD = AB = c$

Suy ra tam giác BDA cân tại A và $\widehat{BDA} = \frac{1}{2} \widehat{A}$.

Áp dụng định lý hàm số Cosin cho $\triangle ABD$, ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} \\ &= 2c^2 - 2c^2 \cdot \cos(180^\circ - A) \end{aligned}$$

$$= 2c^2(1 + \cos A) = 2c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$



Hình 2.9

$$= \frac{c}{b} (a + b + c)(b + c - a) = \frac{4c}{b} p(p-a)$$

Suy ra $BD = 2 \sqrt{\frac{cp(p-a)}{b}}$

Gọi I là trung điểm của BD suy ra $AI \perp BD$.

Trong tam giác ADI vuông tại I, ta có

$$\cos \frac{A}{2} = \cos \widehat{ADI} = \frac{DI}{AD} = \frac{BD}{2c} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Vậy $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

b) Từ định lý hàm số sin, ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{p}{R}$ (1)

Theo câu a) ta có $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$,

Tương tự thì $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$ và $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$,

Kết hợp với công thức $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$

Suy ra $4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 4 \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

$$= \frac{4p}{abc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4pS}{abc} = \frac{p}{R} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

Nhận xét: Từ câu a) và hệ thức lượng giác cơ bản ta suy ra được các công

thức $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; $\cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

b) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

Lời giải:

a) Áp dụng định lý cosin và công thức $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ ta có:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \text{ (đpcm)}$$

b) Theo câu a) tương tự ta có $\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$, $\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Suy ra $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{3p-a-b-c}{3} \right)^3 = \left(\frac{p}{3} \right)^3$$

Mặt khác $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S \leq \sqrt{p \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$

Ta có $p^2 = \frac{(a+b+c)^2}{4} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$ suy ra $S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

Do đó $\cot A + \cot B + \cot C \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{4 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ (đpcm).

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Lời giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b \right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c \right)^2 = a^2 \quad (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) = a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \left[\frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \right] = a^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2 \quad (\text{đpcm})$$

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD có E, F là trung điểm các đường chéo. Chứng minh: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

Lời giải (hình 2.10)

Áp dụng công thức đường trung tuyến với tam giác ABC và ADC ta có:

$$AB^2 + BC^2 = 2BE^2 + \frac{AC^2}{2} \quad (1)$$

$$CD^2 + DA^2 = 2DE^2 + \frac{AC^2}{2} \quad (2)$$

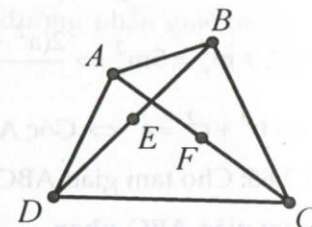
Từ (1) và (2) suy ra

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(BE^2 + DE^2) + AC^2$$

Mặt khác EF là đường trung tuyến tam giác BDF

$$\text{nên } BE^2 + DE^2 = 2EF^2 + \frac{BD^2}{2}$$

Suy ra $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$



Hình 2.10

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.63: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;

a) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

c) $h_a = 2R \sin B \sin C$

d) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

e) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng định lý côsin ta có:

$$VP = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2a} = a = VT$$

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} \cdot \cos C + \frac{c}{2R} \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B \quad (\text{câu a})$$

c) $h_a = 2R \sin B \sin C \Leftrightarrow \frac{2S}{a} = 2R \frac{b}{2R} \sin C \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin C$ (đúng)

d) Áp dụng công thức đường trung tuyến.

e) $\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} = AB \cdot AC \sqrt{1 - \cos^2 A} = AB \cdot AC \cdot \sin A$

Từ đó suy ra (đpcm).

Bài 2.64: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $b + c = 2a \Leftrightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

b) Góc A vuông $\Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$

Hướng dẫn giải

a) $b + c = 2a \Leftrightarrow \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} = 2 \cdot \frac{2S}{h_a} \Leftrightarrow \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$

b) $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2 \Leftrightarrow \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = 5 \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow$ Góc A vuông

Bài 2.65: Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh rằng

a) Tam giác ABC nhọn

b) $2 \sin^2 A = \tan B \tan C$

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy $a > b, a > c \Rightarrow$ góc A là lớn nhất

Và $a^4 = b^4 + c^4 < a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

Mặt khác theo định lý côsin ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos A > 0$

Do đó $\hat{A} < 90^\circ$. Vậy tam giác ABC nhọn.

b) $2 \sin^2 A = \tan B \tan C \Leftrightarrow 2 \sin^2 A \cdot \cos B \cdot \cos C = \sin B \sin C$

$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{a}{2R} \right)^2 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^4 = b^4 + c^4$

Bài 2.66: Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

b) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $S = \frac{abc}{4R} = \frac{2R \sin A \cdot 2R \sin B \cdot 2R \sin C}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

b) $S = pr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C}{2} \cdot r$

Bài 2.67: Cho tứ giác lồi ABCD, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD.

Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là giao điểm hai đường chéo. Khi đó

$S = S_{ABI} + S_{BCI} + S_{CDI} + S_{DAI}$

$= \frac{1}{2} AI \cdot BI \cdot \sin \widehat{AIB} + \frac{1}{2} BI \cdot CI \cdot \sin \widehat{BIC} + \frac{1}{2} CI \cdot DI \cdot \sin \widehat{CID} + \frac{1}{2} DI \cdot AI \cdot \sin \widehat{DIA}$

Ta có các góc $\widehat{AIB}, \widehat{BIC}, \widehat{CID}$ và $\widehat{DIA}$ đôi một bù nhau suy ra

$\sin \widehat{AIB} = \sin \widehat{BIC} = \sin \widehat{CID} = \sin \widehat{DIA} = \sin \alpha$

Do đó $S = \frac{1}{2} BI \cdot AC \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} DI \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$

Bài 2.68: Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$, AD là đường phân giác trong (D thuộc BC).

Chứng minh rằng $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

Hướng dẫn giải

Với $AB = AC$ ta có đpcm

Với $AB \neq AC$. Ta có: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD$

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = AC^2 + AD^2 - AC \cdot AD$

$\Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD^2}{DC^2} = \frac{AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD}{AC^2 + AD^2 - AC \cdot AD}$

$\Leftrightarrow AB^2(AC^2 + AD^2 - AC \cdot AD) = AC^2(AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD)$

$\Leftrightarrow (AB^2 - AC^2)AD^2 = AB \cdot AC \cdot AD(AB - AC)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AD = \frac{AB \cdot AC}{AB + AC} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

Bài 2.69: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\frac{\cos A + \cos B}{a + b} = \frac{(b + c - a)(c + a - b)}{2abc}$

b) $(c^2 + b^2 - a^2) \tan A = (c^2 + a^2 - b^2) \tan B$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng định lý côsin, ta có:

$2abc(\cos A + \cos B) = 2abc \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)$

$= a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) = (a + b)[c^2 - (a + b)^2]$

$= (a + b)(b + c - a)(c + a - b)$

$$\text{Suy ra } \frac{\cos A + \cos B}{a + b} = \frac{(b + c - a)(c + a - b)}{2abc}$$

b) Áp dụng định lý sin và cosin, ta có:

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A \cos B}{\sin B \cos A} = \frac{\frac{a}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{\frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$$

$$\text{Suy ra } (c^2 + b^2 - a^2) \tan A = (c^2 + a^2 - b^2) \tan B$$

Bài 2.70. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Chứng minh rằng

a) $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$

b) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq R^2(a+b+c)^2$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}ah_a$

Mặt khác $(a+b-c)(a+c-b) = a^2 - (b-c)^2 \leq a^2$

$$\Rightarrow \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{1}{2}a \Rightarrow h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$$

b) Vì $S = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ nên bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^2b^2}{R^2} + \frac{b^2c^2}{R^2} + \frac{c^2a^2}{R^2} \leq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \leq (a+b+c)^2$$

Sử dụng câu a) suy ra

$$4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \leq (b+c)^2 - a^2 + (c+a)^2 - b^2 + (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)^2$$

Vậy $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq R^2(a+b+c)^2$

Bài 2.71. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{r^2 + (p-a)^2} + \sqrt{r^2 + (p-b)^2} + \sqrt{r^2 + (p-c)^2} \leq \sqrt{ab+bc+ca}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $S = pr \Rightarrow r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

$$\Rightarrow r^2 + (p-a)^2 = (p-a) \left[\frac{(p-b)(p-c)}{p} + p-a \right] = \frac{(p-a)bc}{p}$$

Tương tự $r^2 + (p-b)^2 = \frac{(p-b)ac}{p}, r^2 + (p-c)^2 = \frac{(p-c)ab}{p}$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{(p-a)bc} + \sqrt{(p-b)ac} + \sqrt{(p-c)ab} \leq \sqrt{p(ab+bc+ca)}$$

BĐT này đúng vì theo CauChy-Schwarz ta có

$$\sqrt{(p-a)bc} + \sqrt{(p-b)ac} + \sqrt{(p-c)ab} \leq \sqrt{(p-a+p-b+p-c)(ab+bc+ca)} = \sqrt{p(ab+bc+ca)}$$

Bài 2.72. Cho tam giác ABC. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp.

Chứng minh rằng: $r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-b) \tan \frac{B}{2} = (p-c) \tan \frac{C}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$(p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-a) \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Từ đó: $r = (p-a) \tan \frac{A}{2}$

Tương tự: $r = (p-b) \tan \frac{B}{2}$ và $r = (p-c) \tan \frac{C}{2}$.

Do đó: $r = (p-a) \tan \frac{A}{2} = (p-b) \tan \frac{B}{2} = (p-c) \tan \frac{C}{2}$.

Bài 2.73. Cho tam giác ABC có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$.

Chứng minh rằng $2 \cot A = \cot B + \cot C$

Hướng dẫn giải

Áp dụng $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ suy ra $2 \cot A = \cot B + \cot C \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có

$$\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow c^2 \cdot \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = b^2 \cdot \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \Leftrightarrow b^4 - c^4 = 2a^2(b^2 - c^2)$$

Suy ra $b^2 + c^2 = 2a^2$ đpcm.

Bài 2.74. Cho M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho

$$\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha.$$

Chứng minh rằng: $\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C$

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý cosin trong tam giác MAB, ta có

$$BM^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot AM \cdot \sin \alpha \Rightarrow BM^2 = AB^2 + AD^2 - 4S_{MAB} \cdot \cot \alpha$$

Tương tự ta có

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 - 4S_{MBC} \cdot \cot \alpha, AD^2 = AC^2 + CD^2 - 4S_{MCA} \cdot \cot \alpha$$

$$\text{Cộng vế với vế suy ra } \cot \alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \cot A + \cot B + \cot C$$

Bài 2.75. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $\widehat{GAB} = \alpha$, $\widehat{GBC} = \beta$, $\widehat{GCA} = \gamma$

$$\text{Chúng minh rằng } \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Áp dụng } \cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \text{ và công thức đường trung tuyến với chú ý}$$

$$S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB}$$

Bài 2.76. Cho tam giác ABC.

$$\text{Chúng minh rằng } (a-b)\cot \frac{C}{2} + (b-c)\cot \frac{A}{2} + (c-a)\cot \frac{B}{2} = 0$$

Hướng dẫn giải

C1: Gọi D là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp (I; r) tam giác với BC.

$$\text{Suy ra } a = BD + DC = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right), \text{ tương tự ta có } b = r \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right)$$

$$\text{Do đó } (a-b)\cot \frac{C}{2} = r \left(\cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} - \cot \frac{C}{2} \cot \frac{A}{2} \right)$$

Xây dựng các biểu thức tương tự và cộng lại suy ra đpcm.

$$\text{C2: } (a-b)\cot \frac{C}{2} + (b-c)\cot \frac{A}{2} + (c-a)\cot \frac{B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} + (b-c)\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} + (c-a)\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(p-c) + (b-c)(p-a) + (c-a)(p-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - c(a-b) + b^2 - c^2 - a(b-c) + c^2 - a^2 - b(c-a) = 0$$

Điều này luôn đúng. Vậy ta có (đpcm).

Bài 2.77: Cho hình bình hành ABCD có $AC = 3AD$.

$$\text{Chúng minh rằng } \cot \widehat{BAD} \geq \frac{4}{3}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 5BD^2$$

Sử dụng định lý côsin và bất đẳng thức Cauchy ta chứng minh được

$$\cos \widehat{BAD} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow \cot \widehat{BAD} \geq \frac{4}{3}$$

Bài 2.78. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c và diện tích S.

Chúng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

Hướng dẫn giải

C1: Áp dụng công thức diện tích Hêrông và bất đẳng thức Cauchy

C2: Áp dụng định lý côsin và công thức tính diện tích ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S \Leftrightarrow 2(b^2 + c^2 + bc \cos A) \geq 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq bc(\sqrt{3} \sin A + \cos A)$$

$$\text{Bất đẳng thức cuối đúng vì } (\sqrt{3} \sin A + \cos A)^2 \leq 4(\sin^2 A + \cos^2 A) = 4 \text{ và}$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

DẠNG TOÁN 4: NHẬN DẠNG TAM GIÁC

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Sử dụng định lý côsin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh (hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải

Áp dụng định lý côsin và sin ta có:

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$.

Chúng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

Ta có: $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$
 $\Leftrightarrow \frac{a}{2R} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b+c}{2R}$
 $\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$
 $\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0 \Leftrightarrow (b+c)(b^2 + c^2) - a^2(b+c) = 0$
 $b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

- a) $a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C = h_a + h_b + h_c$
 b) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra
 $a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a.\frac{2S}{bc} + b.\frac{2S}{ca} + c.\frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$
 $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow a = b = c$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$
 $\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$
 $\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \right) \Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4\sin^2 A \sin^2 B$
 $\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R} \right)^2 = \left(\frac{b}{2R} \right)^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.79: Cho tam giác ABC. Chứng minh tam giác ABC cân nếu $h_a = c.\sin A$

Hướng dẫn giải

Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A$ ta có

$h_a = c.\sin A \Leftrightarrow bh_a = ah_a \Leftrightarrow a = b$ suy ra tam giác ABC cân tại C

Bài 2.80: Cho tam giác ABC.

Chứng minh tam giác ABC cân nếu $4m_a^2 = b(b + 4c.\cos A)$

Hướng dẫn giải

Sử dụng công thức đường trung tuyến và định lí sin.

$4m_a^2 = b(b + 4c.\cos A) \Leftrightarrow 4 \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = b \left(b + 4c.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \Leftrightarrow a = b$

Bài 2.81: Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi:

$a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$

Hướng dẫn giải

Ta có $r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

Theo Cauchy $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{3p-a-b-c}{3} \right)^3 = \left(\frac{p}{3} \right)^3$

Suy ra $36r^2 \leq \frac{4p^3}{3p} = \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hay tam giác ABC đều.

Bài 2.82: Cho tam giác ABC. Tìm góc A trong tam giác biết các cạnh a, b, c

thoả mãn hệ thức: $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2), (b \neq c)$.

Hướng dẫn giải

$b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - c^3 = a^2(b-c) \Leftrightarrow b^2 + bc + c^2 = a^2$

Theo định lí côsin thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Do đó $b^2 + bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$

Bài 2.83: Cho ΔABC thoả mãn điều kiện: $\begin{cases} \frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \\ a = 2b\cos C \end{cases}$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \Leftrightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b+c)$

$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$

$$a = 2b \cos C \Leftrightarrow a = 2b \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow b = c$$

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 2.84: Trong tam giác ABC, chứng minh rằng nếu diện tích tính theo công thức $S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$ thì tam giác ABC đều.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c) = \frac{1}{4}[a^2 - (b-c)^2] \\ &= \frac{1}{4}[(b^2 + c^2 - 2\cos A) - (b-c)^2] = \frac{1}{4}(2bc)(1 - \cos A) = \frac{1}{2}bc(1 - \cos A) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } S = \frac{1}{2}bc \sin A$$

$$\text{nên } 1 - \cos A = \sin A \Leftrightarrow 1 - 2\cos A + \cos^2 A = \sin^2 A$$

$$\Leftrightarrow \cos A(\cos A - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A

Bài 2.85: Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn: $\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$. Chứng minh rằng tam

giác ABC là tam giác cân.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{2a + c}{2a - c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + 2\cos B + \cos^2 B) + \sin^2 B}{\sin^2 B} = \frac{2a + c + 2a - c}{2a - c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos^2 B} = \frac{2a}{2a - c} \Leftrightarrow 2a - c = 2a - 2a \cos B$$

$$\Leftrightarrow 2a \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = c \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$\Leftrightarrow \triangle ABC$ là tam giác cân tại C.

Bài 2.86: Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A hoặc B khi và chỉ khi $\sin C = \cos A + \cos B$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \cos A + \cos B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2(a+b)(p-a)(p-b)}{abc}$$

$$\text{Vậy } \sin C = \cos A + \cos B \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = \frac{2(a+b)(p-a)(p-b)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2cS}{abc} = \frac{2(a+b)(p-a)(p-b)}{abc} \Leftrightarrow c^2[(a+b)^2 - c^2] = (a+b)^2[c^2 - (a-b)^2]$$

$$\Leftrightarrow c^4 = (a^2 - b^2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b^2 = c^2 + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại A hoặc B.}$$

Bài 2.87: Cho tam giác ABC có hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau và có $R.r = \frac{bc}{2(1 + \sqrt{10})}$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm, khi đó tam giác GBC vuông tại G. Theo định lý Pitago và công thức đường trung tuyến suy ra $b^2 + c^2 = 5a^2$.

$$\text{Sử dụng } R.r = \frac{bc}{2(1 + \sqrt{10})}, \text{ trong đó } R = \frac{abc}{4S}, r = \frac{S}{p} \text{ suy ra } b + c = a\sqrt{10}$$

Từ 2 giả thiết trên suy ra $b = c = a\sqrt{5}$

Bài 2.88: Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{4c}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{HD: Ta có: } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{4c} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} = \frac{\sqrt{ab}}{4c}$$

$$\Leftrightarrow (p-c)^2(p-a)(p-b) = \frac{a^2b^2}{16}$$

$$\Leftrightarrow [(a+b-c)(b+c-a)][(a+b-c)(c+a-b)] = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow [b^2 - (c-a)^2][a^2 - (b-c)^2] = a^2b^2 \quad (1)$$

Nhận thấy: $0 < b^2 - (c-a)^2 < b^2$ và $0 < a^2 - (b-c)^2 < a^2$

Nên $[b^2 - (c-a)^2][a^2 - (b-c)^2] \leq a^2b^2$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} c-a=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều.}$$

Chuyên đề II: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Tích vô hướng có rất nhiều ứng dụng trong giải toán. Sau đây chúng ta tiếp cận những ứng dụng của nó trong giải các bài toán hình học.

I. CHỨNG MINH TÍNH VUÔNG GÓC VÀ THIẾT LẬP ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Sử dụng điều kiện $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Chú ý: Ta có $AB \perp CD \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$, để chứng minh $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ thông thường chúng ta phân tích $\vec{AB}, \vec{CD}$ qua hai vectơ không cùng phương.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 &= (\vec{CB} - \vec{CA})^2 + CD^2 - BC^2 - (\vec{CD} - \vec{CA})^2 \\ &= -2\vec{CB} \cdot \vec{CA} + 2\vec{CD} \cdot \vec{CA} = 2\vec{CA}(\vec{CD} - \vec{CB}) \\ &= 2\vec{CA} \cdot \vec{BD} \end{aligned}$$

Do đó đường chéo AC và BD vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\vec{CA} \cdot \vec{BD} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

Ví dụ 2 Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi M, N thuộc cạnh AB và AD sao cho $AM = DN = x$.

a) Chứng minh rằng CN vuông góc với DM.

b) Giả sử P là điểm được xác định bởi $\vec{BP} = y\vec{BC}$ tìm hệ thức liên hệ của x, y và a để MN vuông góc với MP.

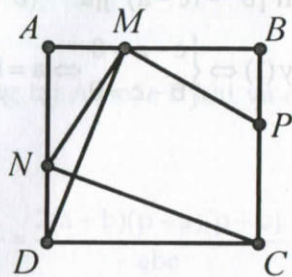
Lời giải (hình 2.11)

a) Ta có $\vec{DN} = -\frac{x}{a}\vec{AD}$, $\vec{AM} = \frac{x}{a}\vec{AB}$

Suy ra $\vec{CN} = \vec{CD} + \vec{DN} = -\vec{AB} - \frac{x}{a}\vec{AD}$

và $\vec{DM} = \vec{DA} + \vec{AM} = \frac{x}{a}\vec{AB} - \vec{AD}$

Suy ra $\vec{DM} \cdot \vec{CN} = \left(\frac{x}{a}\vec{AB} - \vec{AD}\right) \cdot \left(-\vec{AB} - \frac{x}{a}\vec{AD}\right)$



Hình 2.11

$$= -\frac{x}{a}\vec{AB}^2 + \frac{x}{a}\vec{AD}^2 - \frac{x^2}{a^2}\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}$$

Vì ABCD hình vuông nên $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$

Do đó $\vec{DM} \cdot \vec{CN} = -ax + ax = 0$

Vậy CN vuông góc với DM.

b) Ta có $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{a-x}{a}\vec{AB} - \frac{x}{a}\vec{AD}$; $\vec{MP} = \vec{MB} + \vec{BP} = \frac{a-x}{a}\vec{AB} + y\vec{AD}$

Suy ra $MN \perp MP \Leftrightarrow \vec{MN} \cdot \vec{MP} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a-x}{a}\vec{AB} - \frac{x}{a}\vec{AD}\right) \cdot \left(\frac{a-x}{a}\vec{AB} + y\vec{AD}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-x)^2}{a^2}\vec{AB}^2 - \frac{x}{a}y\vec{AD}^2 = 0 \Leftrightarrow (a-x)^2 = axy$$

Ví dụ 3: Cho tam giác đều ABC. Lấy các điểm M, N thỏa mãn $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. Chứng minh rằng $BI \perp IC$.

Lời giải

Giả sử $\vec{AI} = k\vec{AM}$. Ta có

$$\vec{CI} = \vec{AI} - \vec{AC} = k\vec{AM} - \vec{AC} = k(\vec{AB} + \vec{BM}) - \vec{AC} = k\left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}\right) - \vec{AC}$$

$$\text{Hay } \vec{CI} = k\left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}\right) - \vec{AC} = \frac{2k}{3}\vec{AB} + \left(\frac{k}{3} - 1\right)\vec{AC}$$

$$\text{Mặt khác } \vec{CN} = \vec{AN} - \vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \vec{AC}$$

$$\text{Vì } \vec{CI}, \vec{CN} \text{ cùng phương nên } 2k = 1 - \frac{k}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{7}$$

$$\vec{AI} = \frac{3}{7}\vec{AM} = \frac{3}{7}\left(\vec{AB} + \vec{BM}\right) = \frac{3}{7}\left(\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}\right) = \frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{1}{7}\vec{AC}$$

$$\text{Suy ra } \vec{BI} = \vec{AI} - \vec{AB} = \frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{1}{7}\vec{AC} - \vec{AB} = -\frac{5}{7}\vec{AB} + \frac{1}{7}\vec{AC}$$

$$\vec{IC} = \vec{AC} - \vec{AI} = \vec{AC} - \left(\frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{1}{7}\vec{AC}\right) = -\frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{6}{7}\vec{AC}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \vec{BI} \cdot \vec{IC} &= \left(-\frac{5}{7}\vec{AB} + \frac{1}{7}\vec{AC}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{6}{7}\vec{AC}\right) \\ &= \frac{1}{49}\left(10\vec{AB}^2 + 6\vec{AC}^2 - 32\vec{AB} \cdot \vec{AC}\right) \end{aligned}$$

Vì tam giác ABC đều nên $AB = AC$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = \frac{1}{2} AB^2$

Suy ra $\overline{BI} \cdot \overline{IC} = 0$

Vậy $BI \perp IC$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ACM, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng GI vuông góc với CM

Lời giải (2.12)

Đặt $\overline{AB} = \vec{x}$; $\overline{AC} = \vec{y}$ và: $AB = AC = a$. Ta có:

$$\overline{CM} = \overline{AM} - \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB} - \overline{AC} = \frac{1}{2} \vec{x} - \vec{y} \quad (1)$$

Gọi J là trung điểm CM, ta có:

$$\begin{aligned} \overline{AG} &= \frac{2}{3} \overline{AJ} = \frac{1}{3} (\overline{AM} + \overline{AC}) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \overline{AB} + \overline{AC} \right) = \frac{1}{6} \vec{x} + \frac{1}{3} \vec{y} \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA^2 = (\overline{IA} + \overline{AB})^2 \\ IA^2 = (\overline{IA} + \overline{AC})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AI} \cdot \vec{x} = \frac{a^2}{2} \\ \overline{AI} \cdot \vec{y} = \frac{a^2}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} \overline{CM} \cdot \overline{GI} &= \overline{CM} \cdot (\overline{AI} - \overline{AG}) = \left(\frac{1}{2} \vec{x} - \vec{y} \right) \left(\overline{AI} - \frac{1}{6} \vec{x} - \frac{1}{3} \vec{y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \vec{x} \cdot \overline{AI} - \vec{y} \cdot \overline{AI} - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{6} \vec{x} \cdot \vec{y} - \frac{1}{6} \vec{x} \cdot \vec{y} + \frac{1}{3} y^2 = \\ &= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3} = 0. \end{aligned}$$

Suy ra GI vuông góc với CM

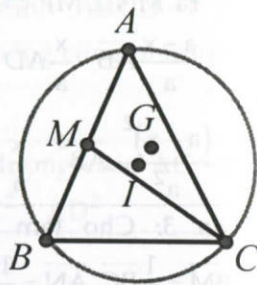
3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài 2.89: Cho 4 điểm A, B, C, D thỏa mãn hệ thức $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Chứng minh rằng $AB \perp CD$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 &\Leftrightarrow \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2 \\ \Leftrightarrow \overline{DC} (\overline{AC} + \overline{AD} - \overline{BC} - \overline{BD}) &= 0 \Leftrightarrow \overline{DC} \cdot 2\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD \end{aligned}$$



Hình 2.12

Bài 2.90: Cho hình vuông ABCD, M là điểm nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$, N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

Hướng dẫn giải

Đặt $\overline{AB} = \vec{x}$, $\overline{AD} = \vec{y}$. Khi đó:

$$\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM} = \frac{1}{4} (3\vec{x} - \vec{y}), \quad \overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \frac{1}{4} (\vec{x} + 3\vec{y})$$

$$\text{Ta có } \overline{MB} \cdot \overline{MN} = \frac{1}{16} (3\vec{x} - \vec{y}) (\vec{x} + 3\vec{y}) = \frac{1}{16} (3x^2 - 3y^2 + 8\vec{x} \cdot \vec{y}) = 0$$

$$\text{Mặt khác } \overline{MB}^2 = \frac{1}{16} (3\vec{x} - \vec{y})^2 = \frac{5}{8} y^2, \quad \overline{MN}^2 = \frac{1}{16} (\vec{x} + 3\vec{y})^2 = \frac{5}{8} y^2$$

Vậy tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M.

Bài 2.91: Cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A. Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy các điểm M, N, E sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CE}{EA}$.

Chứng minh rằng $AN \perp ME$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CE}{EA} = k; \quad \overline{AB} = \vec{i}; \quad \overline{AC} = \vec{j}.$$

$$\text{Ta có: } AM = kMB \Rightarrow \overline{AM} = \frac{k}{k+1} \vec{i}; \quad BN = kNC \Rightarrow \overline{AN} = \frac{\vec{i} - k\vec{j}}{1-k}$$

$$AE = \frac{1}{k} EC \Rightarrow \overline{AE} = \frac{1}{k+1} \vec{j}. \text{ Do đó } \overline{ME} = \overline{AE} - \overline{AM} = \frac{1}{k+1} (\vec{j} - k\vec{i})$$

$$\Rightarrow \overline{AN} \cdot \overline{ME} = \frac{1}{1-k^2} (\vec{j} - k\vec{i}) (\vec{i} - k\vec{j}) = 0 \Rightarrow AN \perp ME \text{ (đpcm).}$$

Bài 2.2 Cho tam giác đều ABC, độ dài cạnh là $3a$. Lấy M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a$, $CN = 2a$, $AP = x$. Tính x để AM vuông góc với PN.

Hướng dẫn giải

$$AM \perp PN \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{PN} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AC} \right) (\overline{AN} - \overline{AP}) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AC} \right) \left(\frac{1}{3} \overline{AC} - \frac{x}{3a} \overline{AB} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2 - \frac{x}{a} \right) \frac{1}{2} + 9a^2 - 18ax = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{5}$$

Bài 2.93: Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ $BK \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Chứng minh rằng $\widehat{BMN} = 90^\circ$

Hướng dẫn giải

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BK} = \vec{c}$. và $BA = a, BC = b, BK = c$.

Ta có: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + \frac{\vec{a}}{2} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2} \left(\vec{b} - \frac{\vec{c}}{2} \right) (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4} (2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} - c^2) \\ &= \frac{1}{4} [2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b} - \vec{a})\vec{c} + (\vec{b} - \vec{c})\vec{c}] \end{aligned}$$

Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ và $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = 0; (\vec{b} - \vec{c})\vec{c} = 0$ nên $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

Suy ra: $\widehat{BMN} = 90^\circ$

Bài 2.94: Cho hình thang vuông ABCD có đường cao $AB = 2a$, đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$. I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng $AI \perp BD$.

Hướng dẫn giải

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \text{ suy ra } 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}) (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB}^2 + 4\overrightarrow{AD}^2 = 0$$

Vậy $AI \perp BD$

Bài 2.95: Cho tứ giác lồi ABCD, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Và I, J lần lượt là trung điểm AD và BC. Chứng minh rằng HK vuông góc với IJ.

Hướng dẫn giải

Để ý rằng $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{BD}$ có cùng hình chiếu trên AC, $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{AC}$ có cùng hình chiếu trên BD và $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

$$\overrightarrow{HK} \cdot 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

Bài 2.96: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC. D là hình chiếu của H lên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với DB

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}) \text{ và } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}) (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}) \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BH} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HD} (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{aligned}$$

Vậy AM vuông góc với DB

Bài 2.97: Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A', B' và C'. Gọi P là giao điểm của BC với B'C'. Chứng minh rằng IP vuông góc với AA'.

Hướng dẫn giải

Gọi H là giao điểm của AI với B'C'. Xét tích vô hướng của hai vectơ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PI} \cdot \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{PI} (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA'}) = (\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HI}) \overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'I}) \overrightarrow{IA'} \\ &= \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{PA'} \cdot \overrightarrow{IA'} - \overrightarrow{IA'}^2 \\ &= \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IA'}^2 = \overrightarrow{IB}^2 - \overrightarrow{IA'}^2 = 0 \end{aligned}$$

Bài 2.98: Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 8$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Lấy điểm E trên tia AC và đặt $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để BE vuông góc với trung tuyến AF của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$

$$\text{Suy ra } BE \perp AF \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}} = \frac{2}{5}$$

Bài 2.99: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và G là trọng tâm, I là tâm đường tròn nội tiếp. Tìm điều kiện của a, b, c để IG vuông góc với IC.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{1}{a+b+c} (a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB})$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CG} = \frac{1}{a+b+c} (a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}) - \frac{1}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$\text{hay } \overrightarrow{GI} = \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{CA} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{CB}$$

Suy ra IG vuông góc với IC khi và chỉ khi $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$

$$\Leftrightarrow (ab + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}) [(b(2a - b - c) + a(2b - a - c))] = 0$$

Do $ab + \overline{CB} \cdot \overline{CA} = ab(1 + \cos C) > 0$ nên dễ có

$$b(2a - b - c) + a(2b - a - c) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$$

Bài 2.100 : Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại M, P là trung điểm của đoạn thẳng AD.

Chứng minh rằng : $MP \perp BC \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MD} \cdot \overline{MB}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} C1: \Rightarrow 2\overline{MP} \cdot \overline{BC} &= (\overline{MA} + \overline{MD})(\overline{MC} + \overline{MB}) \\ &= \overline{MA} \cdot \overline{MC} - \overline{MD} \cdot \overline{MB} + \overline{MD} \cdot \overline{MC} - \overline{MA} \cdot \overline{MB} \\ &= \overline{MA} \cdot \overline{MC} - \overline{MD} \cdot \overline{MB} \end{aligned}$$

Suy ra $MP \perp BC \Leftrightarrow \overline{MP} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MD} \cdot \overline{MB}$

C2: Gọi H là giao điểm của MP và BC.

Ta có $MP \perp BC \Leftrightarrow \widehat{MCH} + \widehat{CMH} = 90^\circ$

$$\Leftrightarrow \widehat{MCH} + \widehat{PMA} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{MCH} = \widehat{MDA}$$

$$\Leftrightarrow \text{tứ giác ABCD nội tiếp} \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MD} \cdot \overline{MB}$$

Bài 2.101: Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Qua A vẽ các đường thẳng song song với BE, CF lần lượt cắt các đường thẳng CF, BE tại P và Q. Chứng minh rằng PQ vuông góc với trung tuyến AM của ABC.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overline{PQ} = \overline{HQ} - \overline{HP}, 2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}.$$

$$\text{Do đó } 2\overline{PQ} \cdot \overline{AM} = (\overline{HQ} - \overline{HP})(\overline{AB} + \overline{AC}) = \overline{HQ} \cdot \overline{AB} - \overline{HP} \cdot \overline{AC}$$

$$\text{Mặt khác, ta có } (\overline{HQ}, \overline{AB}) = -(\overline{HP}, \overline{AC}) \Rightarrow \cos(\overline{HQ}, \overline{AB}) = -\cos(\overline{HP}, \overline{AC})$$

$$\text{Suy ra } AM \perp PQ \Leftrightarrow \overline{PQ} \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow \overline{HQ} \cdot \overline{AB} = \overline{HP} \cdot \overline{AC} \Leftrightarrow \frac{HP}{AB} = \frac{HQ}{AC}.$$

Lại có APHQ là hình bình hành nên $HP = AQ, HQ = AP$.

$$\text{Suy ra } \frac{HP}{AB} = \frac{HQ}{AC} \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{AC}.$$

Mà điều này hiển nhiên đúng vì ta có $\Delta PAC \sim \Delta QAB$ (g.g).

Vậy ta có đpcm.

III. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ BIỂU THỨC HÌNH HỌC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Sử dụng các bất đẳng thức

Cho $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì. Khi đó ta có

+ $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ hay $\vec{a}; \vec{b}$ cùng hướng.

+ $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$ hay $\vec{a}; \vec{b}$ ngược hướng.

• $\vec{u}^2 \geq 0$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} = \vec{0}$

• Bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Bunhiacopski...)

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là một điểm bất kỳ. Chứng minh rằng

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA \cdot GA + MB \cdot GB + MC \cdot GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overline{MA} \cdot \overline{MG} = MA \cdot MG \cdot \cos(\overline{MA}, \overline{MG}) \leq MA \cdot MG$$

$$\text{Tương tự } MB \cdot GB \geq \overline{MB} \cdot \overline{GB}; MC \cdot GC \geq \overline{MC} \cdot \overline{GC}$$

$$\text{Suy ra } MA \cdot GA + MB \cdot GB + MC \cdot GC \geq \overline{MA} \cdot \overline{GA} + \overline{MB} \cdot \overline{GB} + \overline{MC} \cdot \overline{GC}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overline{MA} \cdot \overline{GA} + \overline{MB} \cdot \overline{GB} + \overline{MC} \cdot \overline{GC} &= (\overline{MG} + \overline{GA}) \cdot \overline{GA} + (\overline{MG} + \overline{GB}) \cdot \overline{GB} + (\overline{MG} + \overline{GC}) \cdot \overline{GC} \\ &= \overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } MA \cdot GA + MB \cdot GB + MC \cdot GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 (*)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq 2MA \cdot GA + 2MB \cdot GB + 2MC \cdot GC$$

Kết hợp (*) suy ra

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 &\geq \\ &\geq MA \cdot GA + MB \cdot GB + MC \cdot GC + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

$$\text{hay } MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA \cdot GA + MB \cdot GB + MC \cdot GC$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét:

• Ta có $GA = \frac{2}{3}m_a, GB = \frac{2}{3}m_b, GC = \frac{2}{3}m_c$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Suy ra với mọi điểm M thì

$$m_a \cdot MA + m_b \cdot MB + m_c \cdot MC \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$3(MA^2 + MB^2 + MC^2) \geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$3(MA^2 + MB^2 + MC^2) \geq 2(m_a \cdot MA + m_b \cdot MB + m_c \cdot MC)$$

Đặc biệt

- Với $M \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta có

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 \geq OA \cdot GA + OB \cdot GB + OC \cdot GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Mặt khác ta có $OA = OB = OC = R$, ta có

$$R(GA + GB + GC) \leq 3R^2 \text{ hay } m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R \text{ suy ra } \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}$$

$$R(GA + GB + GC) \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ hay } \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{m_a + m_b + m_c} \leq \frac{3R}{2}$$

$$3R^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ hay } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27}{4}R^2, 9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

- Với $M \equiv I$ tâm đường tròn nội tiếp tam giác, ta có

$$IA \cdot GA + IB \cdot GB + IC \cdot GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\text{Mặt khác } IA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}, IB = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}, IC = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}} \text{ do đó ta có}$$

$$\frac{m_a}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{m_b}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{m_c}{\sin \frac{C}{2}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2r}$$

- Với $M \equiv H$ ta được $3(HA^2 + HB^2 + HC^2) \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Xét tam giác ABC nhọn khi đó ta có

$$HC = \frac{CA'}{\sin \angle CHA'} = \frac{CA'}{\sin B} = \frac{AC \cdot \cos C}{\sin B} = 2R \cos C.$$

Tương tự ta cũng có: $HB = 2R \cos B, HC = 2R \cos C$

$$\text{Do đó } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \left(\frac{p}{3R}\right)^2$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ.

$$\text{Chúng minh rằng } \cos \frac{A}{2} \cdot MA + \cos \frac{B}{2} \cdot MB + \cos \frac{C}{2} \cdot MC \geq \frac{a+b+c}{2}$$

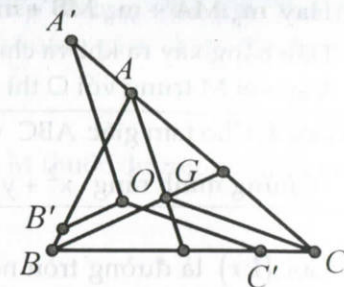
Lời giải (2.13)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

$$\text{Ta có: } a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{IA} \overrightarrow{IA} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{IB} \overrightarrow{IB} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{IC} \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\text{Vì } \cos \frac{A}{2} \cdot MA = \frac{\cos \frac{A}{2}}{IA} \cdot MA \cdot IA \geq \frac{\cos \frac{A}{2}}{IA} \cdot MA \cdot IA,$$



Hình 2.13

$$\text{Tương tự ta có } \cos \frac{B}{2} \cdot MB \geq \frac{\cos \frac{B}{2}}{IB} \cdot MB \cdot IB \text{ và } \cos \frac{C}{2} \cdot MC \geq \frac{\cos \frac{C}{2}}{IC} \cdot MC \cdot IC$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } & \frac{\cos \frac{A}{2}}{IA} \cdot MA \cdot IA + \frac{\cos \frac{B}{2}}{IB} \cdot MB \cdot IB + \frac{\cos \frac{C}{2}}{IC} \cdot MC \cdot IC \\ &= MI \left(\frac{\cos \frac{A}{2}}{IA} \overrightarrow{IA} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{IB} \overrightarrow{IB} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{IC} \overrightarrow{IC} \right) + \cos \frac{A}{2} \cdot IA + \cos \frac{B}{2} \cdot IB + \cos \frac{C}{2} \cdot IC \\ &= \cos \frac{A}{2} \cdot IA + \cos \frac{B}{2} \cdot IB + \cos \frac{C}{2} \cdot IC = AE + BF + CD = \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \cos \frac{A}{2} \cdot MA + \cos \frac{B}{2} \cdot MB + \cos \frac{C}{2} \cdot MC \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Tổng quát

Cho đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$) ngoại tiếp đường tròn tâm J.

$$\text{Chúng minh rằng với điểm M bất kỳ thì } \sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \cdot (MA_i - JA_i) \geq 0$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với G là trọng tâm. Qua điểm O bất kỳ nằm trong tam giác kẻ đường thẳng song song với GA, GB, GC tương ứng cắt CA, AB, BC tại các điểm A', B', C'.

Xác định vị trí điểm M để $m_a MA' + m_b MB' + m_c MC'$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

$$\text{Ta có } m_a \cdot MA' = \frac{3}{2} GA \cdot MA' \geq \frac{3}{2} GA \cdot MA' = \frac{3}{2} GA \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'})$$

$$\text{Tương tự } m_b \cdot MB' \geq \frac{3}{2} GB \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB'}), m_c \cdot MC' \geq \frac{3}{2} GC \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC'})$$

Suy ra

$$m_a \cdot MA' + m_b \cdot MB' + m_c \cdot MC' \geq \frac{3}{2} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \cdot \overrightarrow{MO} + \frac{3}{2} (\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{OC'})$$

Hay $m_a.MA' + m_b.MB' + m_c.MC' \geq m_a.OA' + m_b.OB' + m_c.OC'$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với O.

Vậy với M trùng với O thì $m_a.MA' + m_b.MB' + m_c.MC'$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC và ba số thực x, y, z .

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C$

Lời giải

Gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp ΔABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

Khi đó $(x.I\vec{M} + y.I\vec{N} + z.I\vec{P})^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2.IM^2 + y^2.IN^2 + z^2.IP^2 + 2xy.I\vec{M}.I\vec{N} + 2yz.I\vec{N}.I\vec{P} + 2zx.I\vec{P}.I\vec{M} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)r^2 + 2r^2[xy \cos(180^\circ - C) + yz \cos(180^\circ - A) + zx \cos(180^\circ - B)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét:

+ Khi chọn $x = y = z = 1$ ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

+ Khi chọn $y = z = 1$ ta có $\cos A + x(\cos B + \cos C) \leq 1 + \frac{1}{2}x^2$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.102: Cho tam giác ABC và ba số thực x, y, z . Chứng minh rằng:

$$yz \cos 2A + zx \cos 2B + xy \cos 2C \leq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC , ta có:

$$(xI\vec{A} + yI\vec{B} + zI\vec{C})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)R^2 + 2(xyI\vec{A}.I\vec{B} + yzI\vec{B}.I\vec{C} + xzI\vec{C}.I\vec{A}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)R^2 + 2(xy \cos 2C + yz \cos 2A + zx \cos 2B)R^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow xy \cos 2C + yz \cos 2A + zx \cos 2B \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Nhận xét:

• Khi chọn: $x = y = z = 1$, ta có: $\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B \geq -\frac{3}{2}$

• Khi chọn: $x = z = 1, y = -1$, ta có: $\cos 2C - \cos 2A + \cos 2B \leq \frac{3}{2}$

Bài 2.103: Cho tam giác ABC không đều nội tiếp đường tròn (O). Tìm trên đường tròn điểm M để có tổng bình phương khoảng cách từ đó đến ba đỉnh tam giác là nhỏ nhất, lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trực tâm của tam giác. Với mọi điểm M thuộc đường tròn (O) ta có:

$$\begin{aligned} T &= MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= (\vec{MO} + \vec{OA})^2 + (\vec{MO} + \vec{OB})^2 + (\vec{MO} + \vec{OC})^2 \\ &= 6R^2 + 2\vec{MO}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = 6R^2 + 2\vec{MO}.\vec{OH} \\ &= 6R^2 + 2R.OH.\cos \alpha (\alpha = (\vec{MO}, \vec{OH})) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

- T nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \vec{MO}$ ngược hướng với $\vec{OH}$
- T lớn nhất $\Leftrightarrow \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \vec{MO}$ cùng hướng $\vec{OH}$

Bài 2.104: Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi α là góc giữa hai trung tuyến BD và CK. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos \alpha$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos \alpha &= \frac{|\vec{BD}.\vec{CK}|}{|\vec{BD}||\vec{CK}|} = \frac{|(\vec{BA} + \vec{BC}).(\vec{CA} + \vec{CB})|}{4.BD.CK} \\ &= \frac{|\vec{BA}.\vec{CA} + \vec{BC}(\vec{CA} - \vec{BA}) - \vec{BC}^2|}{4.BD.CK} = \frac{BC^2}{2.BD.CK} \text{ (do } \vec{BA} \perp \vec{CA}) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } 2.BD.CK \leq BD^2 + CK^2$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } BD^2 + CK^2 &= \frac{1}{4}(2.AB^2 + 2.BC^2 - AC^2) + \frac{1}{4}(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2) \\ &= \frac{5BC^2}{4} \text{ (do } BC^2 = AB^2 + AC^2) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \cos \alpha \geq \frac{BC^2}{5BC^2} = \frac{1}{5}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BD = CK$ khi và chỉ khi tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A

$$\text{Vậy } \min \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

Bài 2.105: Cho M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng tam giác ABC. Tìm

$$\text{giá trị nhỏ nhất của } T = \frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c}$$

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có:

$$T = \frac{MA \cdot GA}{a \cdot GA} + \frac{MB \cdot GB}{b \cdot GB} + \frac{MC \cdot GC}{c \cdot GC} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{MA \cdot GA}{a \cdot m_a} + \frac{MB \cdot GB}{b \cdot m_b} + \frac{MC \cdot GC}{c \cdot m_c} \right)$$

Theo BĐT Cauchy ta có

$$\begin{aligned} am_a &= \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{(3a^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3a^2 + (2b^2 + 2c^2 - a^2)}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } am_a \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2$

Chứng minh tương tự:

$$bm_b \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2) \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a^2 + c^2 = 2b^2$$

$$cm_c \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2) \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a^2 + b^2 = 2c^2$$

$$\text{Vậy } T \geq \frac{3\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} (MA \cdot GA + MB \cdot GB + MC \cdot GC)$$

$$\text{Mặt khác } MA \cdot GA + MB \cdot GB + MC \cdot GC \geq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

Vậy $\min T = \sqrt{3}$ khi và chỉ khi ΔABC đều và $M \equiv G$

Bài 2.106: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ

$$\text{nhất: } T = 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot MA + MB + MC$$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$T = 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot MA + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC} \geq 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot MA + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC}$$

Do đó ta có:

$$2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot MA + MB + MC \geq 2 \cos \frac{A}{2} \cdot MA + \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) + AB + AC \quad (1)$$

Lấy E, F trên AB, AC sao cho $AE = AF = 1$.

Dựng hình thoi AESF ta có $AS = 2 \cos \frac{A}{2}$. Suy ra $|\vec{u}| = 2 \cos \frac{A}{2}$ với

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$\text{Do đó: } 2 \cos \frac{A}{2} \cdot MA + \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) = 2 \cdot MA \cdot \cos \frac{A}{2} [1 + \cos(\overrightarrow{MA}, \vec{u})] \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot MA + MB + MC \geq AB + AC$$

Vậy $\min T = AB + AC$ khi và chỉ khi M trùng A

Bài 2.107: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$a) \ am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \geq \frac{9}{4} abc$$

$$b) \ am_b m_c + bm_c m_a + cm_a m_b \geq \frac{9}{4} abc$$

$$c) \ \frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{9}{4} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } (x \cdot \overrightarrow{GA} + y \cdot \overrightarrow{GB} + z \cdot \overrightarrow{GC})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z) (x \cdot GA^2 + y \cdot GB^2 + z \cdot GC^2) \geq a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z) (x \cdot m_a^2 + y \cdot m_b^2 + z \cdot m_c^2) \geq \frac{9}{4} (a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy)$$

$$a) \ \text{Cho } x = a, y = b, z = c \text{ ta được } am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \geq \frac{9}{4} abc$$

$$b) \ \text{Cho } x = \frac{a}{m_a}, y = \frac{b}{m_b}, z = \frac{c}{m_c} \text{ ta được } am_b m_c + bm_c m_a + cm_a m_b \geq \frac{9}{4} abc$$

$$c) \ \text{Cho } x = bc, y = ca, z = ab \text{ ta được } \frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{9}{4} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca}$$

Bài 2.108: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$a) \ a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

$$b) \ R \geq 2r$$

$$c) \ R^2 + a^2 + b^2 \geq c^2$$

$$d) \ 4S \leq (ab + bc + ca) \sqrt{\frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3}}$$

$$e) \ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 8R(R - 2r)$$

Hướng dẫn giải

$$(x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z) (x \cdot OA^2 + y \cdot OB^2 + z \cdot OC^2) \geq a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy$$

$$\Leftrightarrow R^2 (x + y + z)^2 \geq a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy$$

a) Cho $x = y = z$ suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$

b) Cho $x = a, y = b, z = c$ suy ra $R \geq 2r$

c) Cho $x = y = -z$ suy ra $R^2 + a^2 + b^2 \geq c^2$

d) Cho $x = bc, y = ca, z = ab$ suy ra $4S \leq (ab + bc + ca) \sqrt{\frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3}}$

e) Cho $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ suy ra

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 8R(R - 2r)$$

Bài 2.109: Cho tam giác ABC , O là điểm bất kỳ trong tam giác. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB, BC, CA cắt BC, CA, AB tại A', B', C' . Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $cMA' + aMB' + bMC' \geq cOA' + aOB' + bOC'$

Hướng dẫn giải

Ta có $c.MA' = AB.MA' \geq \overline{AB}.MA' = \overline{AB}.MO + \overline{AB}.OA'$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng vế với vế ta được

$$cMA' + aMB' + bMC' \geq \overline{MO}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) + cOA' + aOB' + bOC'$$

Suy ra $cMA' + aMB' + bMC' \geq cOA' + aOB' + bOC'$

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được bài toán tổng quát: Cho O là điểm bất kỳ nằm đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$). Qua O kẻ các đường thẳng song song với $A_iA_{i+1}, i = \overline{1, n}$ (xem $A_{n+1} = A_1$) tương ứng cắt các cạnh $A_{i+1}A_{i+2}$ tại B_i .

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^n A_iA_{i+1}(MB_i - OB_i) \geq 0$

Bài 2.110: Cho tam giác ABC nhọn. Tìm điểm M sao cho $MA + 2MB + \sqrt{3}MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi I là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho

$$\widehat{AIC} = 90^\circ, \widehat{BIA} = 150^\circ, \widehat{CIB} = 120^\circ.$$

$$\text{Khi đó ta có } \frac{\overline{IA}}{IA} + 2\frac{\overline{IB}}{IB} + \sqrt{3}\frac{\overline{IC}}{IC} = \vec{0}$$

$$\text{Vì thế } MA + 2MB + \sqrt{3}MC \geq \overline{MA} \cdot \frac{\overline{IA}}{IA} + 2\overline{MB} \cdot \frac{\overline{IB}}{IB} + \sqrt{3}\overline{MC} \cdot \frac{\overline{IC}}{IC} = IA + 2IB + \sqrt{3}IC$$

Dấu bằng có khi $M \equiv I$

Bài 2.111: Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$), $\vec{e_i}, i = \overline{1, n}$, O là điểm bất kỳ nằm trong đa giác. Gọi B_i là hình chiếu điểm O lên A_iA_{i+1} . Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $\sum_{i=1}^n A_iA_{i+1}(MB_i - OB_i) \geq 0$

Hướng dẫn giải

Theo định lý cos nhím ta có $A_1A_2\vec{e_1} + A_2A_3\vec{e_2} + ... + A_nA_1\vec{e_n} = \vec{0}$ với $\vec{e_i}, i = \overline{1, n}$ là các vectơ đơn vị hướng ra ngoài đa giác và tương ứng vuông góc với A_iA_{i+1} (xem $A_{i+1} \equiv A_1$).

$$\text{Ta có } A_1A_2.MB_1 = \frac{A_1A_2}{OB_1}.MB_1.OB_1 \geq \frac{A_1A_2}{OB_1}.\overline{MB_1}.OB_1$$

$$\text{Mặt khác } \frac{A_1A_2}{OB_1}.\overline{MB_1}.OB_1 = \frac{A_1A_2}{OB_1} \cdot (\overline{MO} + \overline{OB_1}).OB_1 = A_1A_2\overline{MO} + A_1A_2.OB_1$$

$$\Rightarrow A_1A_2.MB_1 \geq A_1A_2\overline{MO} + A_1A_2.OB_1$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng vế với vế ta được

$$\sum_{i=1}^n A_iA_{i+1}.MB_i \geq \overline{MO} \cdot \sum_{i=1}^n A_iA_{i+1}.\vec{e_i} + \sum_{i=1}^n A_iA_{i+1}.OB_i = \sum_{i=1}^n A_iA_{i+1}.OB_i$$

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^n A_iA_{i+1}(MB_i - OB_i) \geq 0$$

Bài 2.112: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$.

Tìm điểm M sao cho tổng $MA_1 + MA_2 + ... + MA_n$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ có tâm là O khi đó $\vec{e_1} + \vec{e_2} + ... + \vec{e_n} = \vec{0}$ với $\vec{e_i}, i = 1, 2, ...$ là các vectơ đơn vị cùng hướng với $\overline{OA_i}, i = 1, 2, ...$.

$$MA_1 = \frac{1}{OA_1}.MA_1.OA_1 \geq \frac{1}{OA_1}.\overline{MA_1}.OA_1 = \frac{1}{OA_1} \cdot (\overline{MO} + \overline{OA_1}).OA_1 = \overline{MO}.\vec{e_1} + OA_1$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng vế với vế ta được

$$MA_1 + MA_2 + ... + MA_n \geq \overline{MO}(\vec{e_1} + \vec{e_2} + ... + \vec{e_n}) + OA_1 + OA_2 + ... + OA_n$$

$$\text{Suy ra } MA_1 + MA_2 + ... + MA_n \geq OA_1 + OA_2 + ... + OA_n$$

Bài 2.113: Cho tam giác ABC ; O là điểm trong tam giác, đặt $\widehat{BOC} = \alpha, \widehat{COA} = \beta, \widehat{AOB} = \gamma$. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $MA \sin \alpha + MB \sin \beta + MC \sin \gamma \geq OA \sin \alpha + OB \sin \beta + OC \sin \gamma$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } S_{MBC} \overline{MA} + S_{MCA} \overline{MB} + S_{MAB} \overline{MC} = \vec{0} \text{ (Xem bài 1.21)}$$

Suy ra $\sin \alpha \cdot \vec{e}_1 + \sin \beta \cdot \vec{e}_2 + \sin \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$ (*) với $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là các vectơ đơn vị cùng hướng với $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$.

Ta có

$$MA \sin \alpha \geq \frac{\sin \alpha}{OA} \cdot \vec{MA} \cdot \vec{OA} = \frac{\sin \alpha}{OA} \cdot (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot \vec{OA} = \sin \alpha \cdot \vec{MO} \cdot \vec{e}_1 + \sin \alpha \cdot OA$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng vế với vế và kết hợp (*) ta được: $MA \sin \alpha + MB \sin \beta + MC \sin \gamma \geq OA \sin \alpha + OB \sin \beta + OC \sin \gamma$

Nhận xét:

- Cho $M \equiv G, N \equiv I$ ta có

$$GA \sin \widehat{BIC} + GB \sin \widehat{CIA} + GC \sin \widehat{AIB} \geq IA \sin \widehat{BIC} + IB \sin \widehat{CIA} + IC \sin \widehat{AIB}$$

$$\text{Mặt khác } \sin \widehat{BIC} = \sin \left(\pi - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{A}{2}$$

$$\text{Tương tự } \sin \widehat{CIA} = \cos \frac{B}{2}, \sin \widehat{AIB} = \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Và } \cos \frac{A}{2} \cdot IA + \cos \frac{B}{2} \cdot IB + \cos \frac{C}{2} \cdot IC = AE + BF + CD = \frac{a+b+c}{2};$$

$$GA = \frac{2}{3}m_a, GB = \frac{2}{3}m_b, GC = \frac{2}{3}m_c. \text{ Ta được bài toán}$$

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$m_a \cos \frac{A}{2} + m_b \cos \frac{B}{2} + m_c \cos \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}(a+b+c)$$

- Cho $M \equiv O, N \equiv I$ ta được

$$OA \cos \frac{A}{2} + OB \cos \frac{B}{2} + OC \cos \frac{C}{2} \geq \frac{a+b+c}{2}, \text{ kết hợp định lý sin ta có}$$

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \sin A + \sin B + \sin C$$

- Cho $M \equiv H, N \equiv I$ và kết hợp với $\tan A \cdot HA = a, \tan B \cdot HB = b, \tan C \cdot HC = c$ khi tam giác ABC nhọn.

$$\text{Ta được } \frac{a \cos \frac{A}{2}}{\tan A} + \frac{b \cos \frac{B}{2}}{\tan B} + \frac{c \cos \frac{C}{2}}{\tan C} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Bài 2.114: Cho tam giác ABC, tìm vị trí điểm M để

$$P = a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Biết:

- M là điểm bất kì
- M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- M nằm trên đường thẳng d bất kỳ

Hướng dẫn giải

Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác khi đó ta có $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

$$\text{Suy ra } (a+b+c)\vec{MI} = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 MI^2 = a^2 MA^2 + b^2 MB^2 + c^2 MC^2 + 2ab\vec{MA} \cdot \vec{MB} + 2bc\vec{MB} \cdot \vec{MC} + 2ca\vec{MC} \cdot \vec{MA}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)MI^2 = a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 - abc$$

- $P \geq abc$ dấu bằng xảy ra khi $M \equiv I$

$$\text{Ta có } MI^2 = MO^2 + OI^2 + 2\vec{MO} \cdot \vec{OI} = R^2 + OI^2 - 2R \cdot OI \cdot \cos \widehat{MOI}$$

- P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MI^2 đạt lớn nhất

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{MOI} = -1 \Leftrightarrow \widehat{MOI} = 180^\circ$$

Hay M là giao điểm của tia IO với đường tròn (O)

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI^2 đạt nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{MOI} = 1 \Leftrightarrow \widehat{MOI} = 0^\circ$$

Hay M là giao điểm của tia OI với đường tròn (O)

- P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI đạt nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I lên d

Bài 2.115: Cho n điểm $A_1 A_2 \dots A_n$, và n số dương $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. O là điểm thỏa

mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} = \vec{0}$. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot MA_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} \cdot \vec{MA_i} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2$$

Hướng dẫn giải

$$\alpha_i \vec{OA_i} \cdot \vec{MA_i} \geq \alpha_i \vec{OA_i} \cdot \vec{MA_i}, \forall i = 1, n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} \cdot \vec{MA_i} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} \cdot \vec{MA_i}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} \cdot \vec{MA_i} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} (\vec{MO} + \vec{OA_i}) = \vec{MO} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\alpha_i \cdot MA_i^2 + \alpha_i OA_i^2 \geq 2\alpha_i MA_i \cdot OA_i, \forall i = 1, n, \alpha_i > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot MA_i^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot MA_i^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 \geq 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i \cdot OA_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot MA_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i MA_i \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.116: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Xác định điểm M sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất.

- a) $\sqrt{2}MA + MB + MC$ b) $2\sqrt{2}MA + \sqrt{10}(MB + MC)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$-\overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) \leq -\overrightarrow{MA} \cdot \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| = MA \cdot \sqrt{\left(\frac{AB}{AB} + \frac{AC}{AC} \right)^2} = \sqrt{2} \cdot MA$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}MA + MB + MC \geq -\overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) + \overrightarrow{MB} \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \overrightarrow{MC} \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = AB + AC$$

Suy ra $M \equiv A$

- b) Gọi I là trung điểm của đường cao AH. Ta có $a^2 \overrightarrow{IA} + b^2 \overrightarrow{IB} + c^2 \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
(Theo bài 1.24)

Kết hợp bài 1.24 ta thu được bất đẳng thức

$$a^2 \cdot IA(MA - IA) + b^2 \cdot IB(MB - IB) + c^2 \cdot IC(MC - IC) \geq 0$$

với mọi điểm M. Áp dụng định lí sin suy ra

$$(MA - IA) \cdot IA \sin^2 A + (MB - IB) \cdot IB \sin^2 B + (MC - IC) \cdot IC \sin^2 C \geq 0 \quad \text{với mọi điểm M}$$

$$\text{Giả sử tam giác ABC cân cạnh } x \text{ thì } IA = \frac{\sqrt{2}x}{4}, IB = \frac{\sqrt{10}x}{4}$$

$$\text{Suy ra } 2\sqrt{2}MA + \sqrt{10}(MB + MC) \geq 6x^2$$

Vậy I là điểm cần tìm.

Bài 2.117: Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 6 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

Hướng dẫn giải

Gọi A', B', C', lần lượt là trung điểm BC, CA, AB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, vì tam giác nhọn nên O nằm trong tam giác ABC ta có:

$$(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow OA'^2 + OB'^2 + OC'^2 \geq 2OB' \cdot OC' \cdot \cos A + 2OC' \cdot OA' \cdot \cos B + 2OA' \cdot OB' \cdot \cos C$$

$$\text{Mặt khác } OA' = OB \cdot \cos \widehat{BOA'} = OB \cdot \cos A = R \cos A$$

$$\text{Tương tự ta có: } OB' = R \cos B, OC' = R \cos C$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 6 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

Dấu "=" xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài 2.118: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

- a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$ b) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
c) $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ d) $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$
e) $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ f) $\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải

- a) Ta có $3(MA^2 + MB^2 + MC^2) \geq a^2 + b^2 + c^2$ cho M trùng với tâm ngoại tiếp

tam giác ta được $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Áp dụng định lí sin ta có $9R^2 \geq 4R^2 \sin^2 A + 4R^2 \sin^2 B + 4R^2 \sin^2 C$

$$\text{Hay } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

- b) Áp dụng các bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ và câu a

- c) Áp dụng các bất đẳng thức $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và câu a

- d) Ta có nếu A, B, C là 3 góc của tam giác thì $90^\circ - \frac{A}{2}; 90^\circ - \frac{B}{2}; 90^\circ - \frac{C}{2}$ cũng

là ba góc của tam giác do đó theo câu a thì ta suy ra được

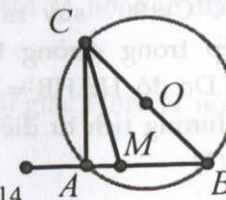
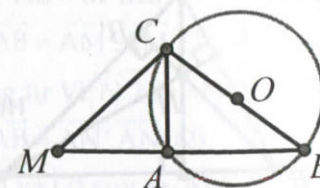
$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

IV. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM TỚI ĐƯỜNG TRÒN VÀ ỨNG DỤNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- a) **Bài toán:** Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.

Chứng minh: Vẽ đường kính BC của đường tròn (O; R). Ta có $\overrightarrow{MA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{MC}$ lên đường thẳng MB. Theo công thức hình chiếu ta có



Hình 2.14

$$\begin{aligned} \overline{MA} \cdot \overline{MB} &= \overline{MC} \cdot \overline{MD} = (\overline{MO} + \overline{OC}) \cdot (\overline{MO} + \overline{OB}) \\ &= (\overline{MO} - \overline{OB}) \cdot (\overline{MO} + \overline{OB}) = \overline{MO}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{MO}^2 - R^2. \end{aligned}$$

Từ bài toán trên ta có định nghĩa sau:

b) Định nghĩa: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định.

Một đường thẳng thay đổi đi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A, B . Khi đó $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MO}^2 - R^2$ là đại lượng không đổi được gọi là *phương tích* của điểm M đối với đường tròn $(O; R)$, kí hiệu là $P_{M/(O)}$

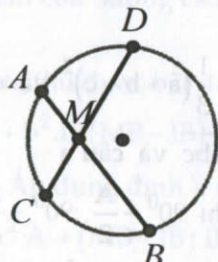
Chú ý: Nếu M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT .

$$\text{Khi đó: } P_{M/(O)} = \overline{MT}^2 = \overline{MO}^2 - R^2$$

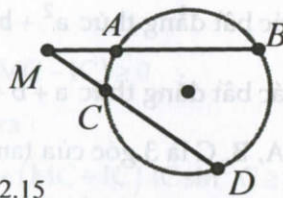
c) Các tính chất:

- Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M . Điều kiện cần và đủ để bốn điểm A, B, C, D nội tiếp được đường tròn là

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} \quad (\text{hay } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}).$$



Hình 2.15



Hình 2.16

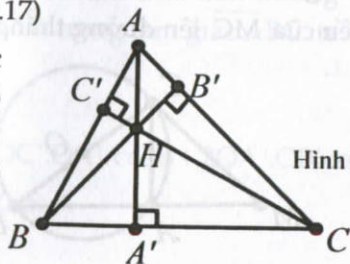
- Cho đường AB cắt đường thẳng Δ ở M và điểm C trên đường thẳng Δ ($C \neq M$). Điều kiện cần và đủ để Δ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C là $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC}^2$.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H . Chứng minh rằng $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$

Lời giải (hình 2.17)

Ta có $\widehat{BB'C} = \widehat{BC'C} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $BCB'C'$ nội tiếp trong đường tròn (C) đường kính BC . Do đó $\overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$ (vì cùng bằng phương tích từ điểm H tới đường tròn (C)) (1)



Hình 2.17

Tương tự tứ giác $ACA'C'$ nội tiếp được nên $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm P cố định ở bên trong đường tròn đó. Hai dây cung thay đổi AB và CD luôn đi qua điểm P và vuông góc với nhau.

a) Chứng minh rằng $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$ không đổi.

b) Chứng minh rằng $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ không phụ thuộc vị trí điểm P .

Lời giải (hình 2.18)

a) Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD suy ra $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ và $\overline{OF} \perp \overline{CD}$

$$\text{Ta có } \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = (2\overline{AE})^2 + (2\overline{CF})^2$$

$$= 4(\overline{AO}^2 - \overline{OE}^2) + 4(\overline{CO}^2 - \overline{OF}^2) = 4[2R^2 - (\overline{OE}^2 + \overline{OF}^2)] = 4(2R^2 - \overline{OP}^2)$$

Suy ra $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$ không đổi.

b) $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$

$$= (\overline{PA} + \overline{PB})^2 + (\overline{PC} + \overline{PD})^2 - 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} - 2\overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

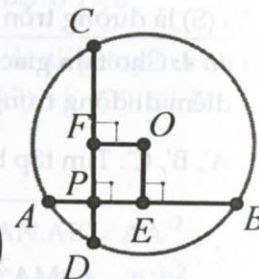
$$= \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 2\overline{PA} \cdot \overline{PB} + 2\overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

$$\text{Mặt khác theo câu a) ta có } \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4(2R^2 - \overline{OP}^2)$$

$$\text{và } P_{P(O)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PO}^2 - R^2$$

$$\text{Suy ra } \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 4(2R^2 - \overline{OP}^2) + 4(\overline{PO}^2 - R^2) = 4R^2$$

Vậy $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ không phụ thuộc vị trí điểm P .



Hình 2.18

Ví dụ 3: Cho đường tròn đường kính AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB ở H ($H \neq A, H \neq B$). Một đường thẳng quay quanh H cắt đường tròn ở M, N và các đường thẳng AM, AN lần lượt cắt Δ ở M', N' .

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, M', N' thuộc một đường tròn (C) nào đó.

b) Chứng minh rằng các đường tròn (C) luôn đi qua hai điểm cố định

Lời giải (hình 2.19)

a) Vì $\widehat{M'HB} = \widehat{M'MB} = 90^\circ$ nên tứ giác $BHM'M$ nội tiếp được suy ra

$$\overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AM'} \cdot \overline{AM} \quad (1).$$

Tương tự Vì $\widehat{N'HB} = \widehat{N'NB} = 90^\circ$ nên tứ giác $HBNN'$ nội tiếp được suy ra

$$\overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AN'} \cdot \overline{AN} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{AM'} \cdot \overline{AM} = \overline{AN'} \cdot \overline{AN}$

Suy ra bốn điểm M, N, M', N' thuộc một đường tròn.

b) Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của đường tròn (C) với đường thẳng AB và E, F lần lượt là giao điểm của Δ với đường tròn đường kính AB.

Khi đó ta có $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$
Mặt khác

$$\overline{AH} \cdot \overline{AB} = (\overline{AE} + \overline{EH}) \overline{AB} = \overline{AE} \cdot (\overline{AE} + \overline{EB}) = \overline{AE}^2$$

$$\text{và } \overline{AH} \cdot \overline{AB} = (\overline{AF} + \overline{FH}) \overline{AB} = \overline{AF} \cdot (\overline{AF} + \overline{FB}) = \overline{AF}^2$$

Suy ra $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AE}^2 = \overline{AF}^2$

Do đó P, Q thuộc đường tròn (S) tiếp xúc với AE, AF ở E, F.

Vì (S) là đường tròn cố định nên P, Q cố định thuộc đường tròn (C).

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. Giả sử M là điểm di động trong đường tròn (O). Nối AM, BM, CM lần lượt cắt (O) tại A', B', C'. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3$.

Lời giải (hình 2.20)

$$\text{Ta có DT} \Leftrightarrow \frac{MA^2}{MA' \cdot MA} + \frac{MB^2}{MB' \cdot MB} + \frac{MC^2}{MC' \cdot MC} = 3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{MA^2}{MA' \cdot MA} - \frac{MB^2}{MB' \cdot MB} - \frac{MC^2}{MC' \cdot MC} = 3 \quad (*)$$

Mặt khác

$$P_{M/(O)} = \overline{MA'} \cdot \overline{MA} = \overline{MB'} \cdot \overline{MB} = \overline{MC'} \cdot \overline{MC} = MO^2 - R^2$$

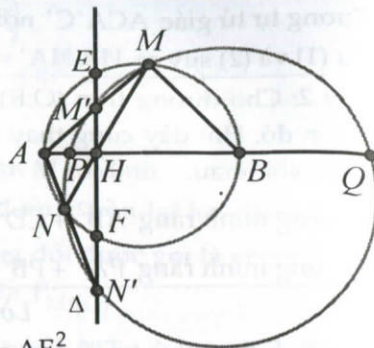
$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = -3(MO^2 - R^2) \quad (1)$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm GO. Ta có:

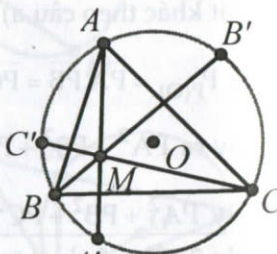
$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = -3(MO^2 - R^2)$$

$$\Leftrightarrow MG^2 + MO^2 = R^2 - \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$



Hình 2.19



Hình 2.20

$$\Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IG})^2 + (\overline{MI} + \overline{IO})^2 = R^2 - \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IO^2 = R^2 - \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}(GA^2 + GB^2 + GC^2) - IO^2 \Leftrightarrow MI = k$$

$$\text{Trong đó } k^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}(GA^2 + GB^2 + GC^2) - IO^2$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = k$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 2.119: Trong đường tròn tâm (O; R) cho hai dây cung AA' và BB' vuông góc với nhau tại S. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $SM \perp A'B'$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overline{SM} \cdot \overline{A'B'} = \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SB}) \cdot (\overline{SB'} - \overline{SA'}) = \frac{1}{2}(\overline{SA} \cdot \overline{SA'} - \overline{SB} \cdot \overline{SB'}) = 0$$

Bài 2.120: Cho hai đường tròn (O) và (O'); AA', BB' là các tiếp tuyến chung ngoài của chúng. đường thẳng AB' theo thứ tự cắt (O) và (O') tại M, N. Chứng minh rằng $AM = B'N$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì AA' tiếp xúc với (O'), BB' tiếp xúc với (O) nên } \begin{cases} \overline{AN} \cdot \overline{AB'} = \overline{AA'}^2 \\ \overline{B'M} \cdot \overline{B'A} = \overline{B'B}^2 \end{cases} \text{ Mặt}$$

khác $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ nên $\overline{AN} \cdot \overline{AB'} = \overline{B'M} \cdot \overline{B'A} \Rightarrow \overline{AN} = \overline{B'M} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{B'N}$

Bài 2.121: Cho tam giác ABC không cân tại A; AM, AD lần lượt là trung tuyến, phân giác của tam giác. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng $BE = CF$

Hướng dẫn giải

Cho tam giác ABC không cân tại A; AM, AD lần lượt là trung tuyến, phân giác của tam giác. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB, AC tại E, F. Chứng minh rằng $BE = CF$

$$\text{HD: Ta có } \begin{cases} \overline{BE} \cdot \overline{BA} = \overline{BM} \cdot \overline{BD} \\ \overline{CF} \cdot \overline{CA} = \overline{CM} \cdot \overline{CD} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}; \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} = 1 \Rightarrow \overline{BE} = \overline{CF}$$

Bài 2.122: Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định. Một đường thẳng quay quanh A, cắt (O) tại M và N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNB.

Gọi C là giao điểm của AB và (I). Khi đó ta có:

$$P_{A/(I)} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AM} \cdot \overline{AN} = P_{A/(O)}$$

(không đổi vì A, (O) cố định). Suy ra $\overline{AC} = \frac{P_{A/(O)}}{\overline{AB}}$

Vì A, B cố định và C thuộc AB nên từ hệ thức trên ta có C cố định.

Suy ra I thuộc đường trung trực của BC cố định

Bài 2.123: Cho đường tròn (O; R) và điểm P cố định nằm trong đường tròn. Giả sử AB là dây cung thay đổi luôn đi qua P. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, B cắt nhau tại C. Tìm tập hợp điểm C.

Hướng dẫn giải

Kẻ $CH \perp OP$.

Ta có tứ giác CEPH nội tiếp nên $OP \cdot OH = OE \cdot OC$

Vì tam giác OBC vuông tại B và BE là đường cao nên $OE \cdot OC = OB^2 = R^2$

$$\text{Suy ra } OP \cdot OH = R^2 \Rightarrow OH = \frac{R^2}{OP}$$

Vì O, P cố định nên H cố định

Vậy tập hợp điểm C là đường thẳng vuông góc với OP tại H.

Bài 2.124: Cho đường tròn (O) đường kính AB, và điểm H cố định thuộc AB. Từ điểm K thay đổi trên tiếp tuyến tại B của (O), vẽ đường tròn (K; KH) cắt (O) tại C và D. Chứng minh rằng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Gọi I là điểm đối xứng của H qua B, suy ra I cố định và thuộc (K).

Gọi M là giao điểm của CD và AB.

Ta có $\overline{MH} \cdot \overline{MI} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ và

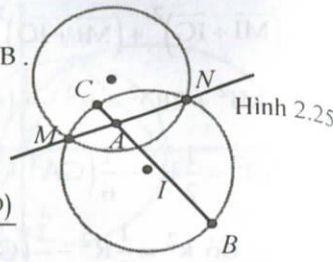
$$\overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MA} \cdot \overline{MB} \text{ suy ra } \overline{MH} \cdot \overline{MI} = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$$

$$\Rightarrow (\overline{MB} + \overline{BH})(\overline{MB} + \overline{BI}) = \overline{MB}(\overline{MB} + \overline{BA})$$

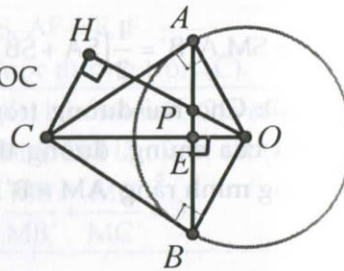
$$\Leftrightarrow (\overline{MB} + \overline{BH})(\overline{MB} - \overline{BH}) = \overline{MB}^2 + \overline{MB} \cdot \overline{BA}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MB}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MB} \cdot \overline{BA} \Leftrightarrow \overline{BM} = \frac{\overline{BH}^2}{\overline{BA}}$$

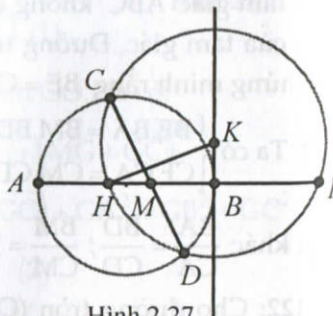
Vì A, B, H cố định suy ra M cố định (đpcm).



Hình 2.25



Hình 2.26



Hình 2.27

Bài 2.125: Cho đường tròn đường kính AB, H là điểm nằm giữa AB và đường thẳng Δ vuông góc với AB tại H. Gọi E, F là giao điểm của đường tròn và Δ . Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AE và đường tròn (C) bất kỳ qua H, B. Giả sử hai đường tròn đó cắt nhau tại M và N, chứng minh rằng AM và AN là hai tiếp tuyến của (C).

Hướng dẫn giải

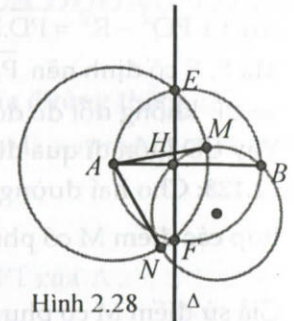
Ta có $AM = AN = AE$.

Trong tam giác AEB:

$$EH \perp AB \Rightarrow AE^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$$

$$\text{Suy ra } \overline{AM}^2 = \overline{AN}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$$

Vậy AM và AN là hai tiếp tuyến của (C).



Hình 2.28

Bài 2.126: Cho hai đường tròn đồng tâm O là (C_1) và (C_2) ((C_2) nằm trong (C_1)). Từ một điểm A nằm trên (C_1) kẻ tiếp tuyến AB tới (C_2) . AB giao (C_1) lần thứ hai tại C. D là trung điểm của AB. Một đường thẳng qua A cắt (C_2) tại E, F sao cho đường trung trực của đoạn DF và EC giao nhau tại

điểm M nằm trên AC. Tính $\frac{AM}{MC}$?

Hướng dẫn giải

B là trung điểm AC.

$$\text{Ta có } P_{A/(C_2)} = \overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AB}^2 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot 2 \cdot \overline{AB} = \overline{AD} \cdot \overline{AC}$$

Do đó tứ giác DCFE nội tiếp.

Suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác

$$DCFE \text{ mà } M \text{ nằm trên } AC \text{ nên } \overline{MD} = \overline{MC} = \frac{1}{2} \overline{DC}.$$

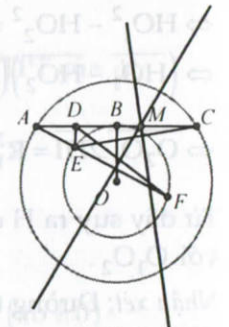
$$\text{Từ đó ta tính được } \overline{AM} = \frac{5}{4} \overline{AB} \text{ và } \overline{MC} = \frac{3}{4} \overline{AB} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{5}{3}$$

Bài 2.127: Cho đường tròn (O; R) và hai điểm P, Q cố định (P nằm ngoài (O), Q nằm trong (O)). Dây cung AB của (O) luôn đi qua Q. PA, PB lần lượt là giao (O) lần thứ hai tại D, C. Chứng minh rằng CD luôn đi qua điểm cố định.

Hướng dẫn giải

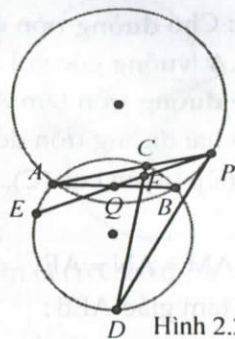
Gọi E là giao điểm thứ hai của PQ với đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. CD cắt PQ tại F.

$$\text{Ta có } \overline{OQ}^2 - R^2 = \overline{QA} \cdot \overline{QB} = \overline{QP} \cdot \overline{QE}.$$



Hình 67

Mà P, Q cố định nên $\overline{PQ}$ không đổi
 $\Rightarrow \overline{QE}$ không đổi do đó E cố định.
 Mặt khác $\widehat{PDC} = \widehat{PBA} = \widehat{PEA}$
 nên tứ giác DAEF nội tiếp
 suy ra $PO^2 - R^2 = \overline{PD} \cdot \overline{PA} = \overline{PE} \cdot \overline{PF}$
 Mà P, E cố định nên $\overline{PE}$ không đổi
 $\Rightarrow \overline{PF}$ không đổi do đó F cố định.
 Vậy CD luôn đi qua điểm cố định là F.



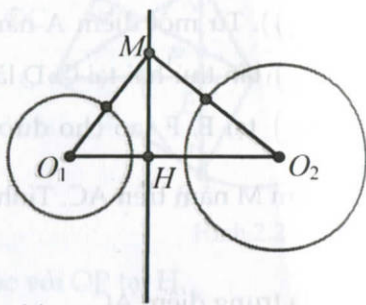
Hình 2.29

Bài 2.128: Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$. Tìm tập hợp các điểm M có phương tích đối với hai đường tròn bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử điểm M có phương tích đến hai đường tròn bằng nhau.
 Gọi H là hình chiếu của M trên O_1O_2 , I là trung điểm của O_1O_2 . Ta có:

$$\begin{aligned} P_{M/(O_1)} &= P_{M/(O_2)} \Leftrightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2 \\ \Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 &= R_1^2 - R_2^2 \\ \Leftrightarrow (MH^2 + HO_1^2) - (MH^2 + HO_2^2) &= R_1^2 - R_2^2 \\ \Leftrightarrow HO_1^2 - HO_2^2 &= R_1^2 - R_2^2 \\ \Leftrightarrow (\overline{HO_1} - \overline{HO_2})(\overline{HO_1} + \overline{HO_2}) &= R_1^2 - R_2^2 \\ \Leftrightarrow \overline{O_2O_1} \cdot 2\overline{HI} &= R_1^2 - R_2^2 \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{O_1O_2} \end{aligned}$$



(1) Hình 2.30

Từ đây suy ra H cố định, suy ra M thuộc đường thẳng qua H và vuông góc với O_1O_2 .

Nhận xét: Đường thẳng này được gọi là **trục đẳng phương** của hai đường tròn (O_1) và (O_2) .

Chú ý các hệ quả sau có nhiều ứng dụng:

Cho hai đường tròn (O) và (I). Từ bài toán ta suy ra được các tính chất sau:

- Trục đẳng phương của hai đường tròn vuông góc với đường thẳng nối tâm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau tại A và B thì AB chính là trục đẳng phương của chúng.
- Nếu điểm M có cùng phương tích đối với (O) và (I) thì đường thẳng qua M vuông góc với OI là trục đẳng phương của hai đường tròn.
- Nếu hai điểm M, N có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì đường thẳng MN chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.
- Nếu 3 điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì 3 điểm đó thẳng hàng.
- Nếu (O) và (I) tiếp xúc nhau tại A thì đường thẳng qua A và vuông góc với OI chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Vector pháp tuyến và phương trình tổng quát của đường thẳng:

a. **Định nghĩa:** Cho đường thẳng Δ . Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là **vector pháp tuyến** (VTPT) của Δ nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ .

Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là VTPT của Δ thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của Δ .

b. **Phương trình tổng quát của đường thẳng**

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (a; b)$.

Khi đó $M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow \overline{MM_0} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overline{MM_0} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad (c = -ax_0 - by_0) \quad (1)$$

(1) gọi là **phương trình tổng quát** của đường thẳng Δ .

Chú ý:

- Nếu đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ thì $\vec{n} = (a; b)$ là VTPT của Δ .

c) **Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát**

- Δ song song hoặc trùng với trục Ox $\Leftrightarrow \Delta: by + c = 0$
- Δ song song hoặc trùng với trục Oy $\Leftrightarrow \Delta: ax + c = 0$
- Δ đi qua gốc tọa độ $\Leftrightarrow \Delta: ax + by = 0$
- Δ đi qua hai điểm $A(a; 0), B(0; b) \Leftrightarrow \Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ với $(ab \neq 0)$
- Phương trình đường thẳng có hệ số góc k là $y = kx + m$ với $k = \tan \alpha$, α là góc hợp bởi tia Mt của Δ ở phía trên trục Ox và tia Mx

2. **Vị trí tương đối của hai đường thẳng.**

Cho hai đường thẳng $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0; d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

- d_1 cắt d_2 khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$
 - $d_1 // d_2$ khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$,
- hoặc $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$

- $d_1 \equiv d_2$ khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$

Chú ý: Với trường hợp $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 \neq 0$ khi đó

- + Nếu $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.
- + Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.
- + Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1:

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

- Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định
- Điểm $A(x_0; y_0) \in \Delta$
- Một vector pháp tuyến $\vec{n}(a; b)$ của Δ

Khi đó phương trình tổng quát của Δ là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

Chú ý:

- Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$ nhận $\vec{n}(a; b)$ làm vector pháp tuyến.
- Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì VTPT đường thẳng này cũng là VTPT của đường thẳng kia.
- Phương trình đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$\Delta: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0$$

hoặc ta chia làm hai trường hợp

- + $x = x_0$: nếu đường thẳng song song với trục Oy
- + $y - y_0 = k(x - x_0)$: nếu đường thẳng cắt trục Oy
- Phương trình đường thẳng đi qua $A(a; 0), B(0; b)$ với $ab \neq 0$ có dạng

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC biết $A(2; 0), B(0; 4), C(1; 3)$. Viết phương trình tổng quát của

- Đường cao AH
- Đường trung trực của đoạn thẳng BC.
- Đường thẳng AB.
- Đường thẳng qua C và song song với đường thẳng AB.

Lời giải

- Vì $AH \perp BC$ nên $\vec{BC}$ là vector pháp tuyến của AH
Ta có $\vec{BC}(1; -1)$ suy ra đường cao AH đi qua A và nhận $\vec{BC}$ là vector pháp tuyến có phương trình tổng quát là $1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 0) = 0$ hay $x - y - 2 = 0$.
- Đường trung trực của đoạn thẳng BC đi qua trung điểm BC và nhận vector $\vec{BC}$ làm vector pháp tuyến.

Gọi I là trung điểm BC khi đó $x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1}{2}, y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$

Suy ra phương trình tổng quát của đường trung trực BC là

$$1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(y - \frac{7}{2}\right) = 0 \text{ hay } x - y + 3 = 0$$

- Phương trình tổng quát của đường thẳng AB có dạng $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ hay $2x + y - 4 = 0$.

- Cách 1: Đường thẳng AB có VTPT là $\vec{n}(2; 1)$ do đó vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{n}(2; 1)$ làm VTPT do đó có phương trình tổng quát là $2 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 3) = 0$ hay $2x + y - 5 = 0$.

Cách 2: Đường thẳng Δ song song với đường thẳng AB có dạng $2x + y + c = 0$.

Điểm C thuộc Δ suy ra $2 \cdot 1 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -5$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình tổng quát là $2x + y - 5 = 0$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$ và điểm $M(-1; 2)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết:

- Δ đi qua điểm M và có hệ số góc $k = 3$
- Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d
- Δ đối xứng với đường thẳng d qua M

Lời giải:

a) Đường thẳng Δ có hệ số góc $k=3$ có phương trình dạng $y=3x+m$. Mặt khác $M \in \Delta \Rightarrow 2=3 \cdot (-1)+m \Rightarrow m=5$

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $y=3x+5$ hay $3x-y+5=0$.

b) Ta có $x-2y+3=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ do đó hệ số góc của đường thẳng d là $k_d=\frac{1}{2}$.

Vì $\Delta \perp d$ nên hệ số góc của Δ là k_Δ thì $k_d \cdot k_\Delta = -1 \Rightarrow k_\Delta = -2$

Do đó $\Delta: y=-2x+m, M \in \Delta \Rightarrow 2=-2 \cdot (-1)+m \Rightarrow m=0$

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $y=-2x-2$ hay $2x+y+2=0$.

c) Cách 1: Ta có $-1-2 \cdot 2+3 \neq 0$ do đó $M \notin d$ vì vậy đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d qua M sẽ song song với đường thẳng d suy ra đường thẳng Δ có VTPT là $\vec{n}(1;-2)$.

Ta có $A(1;2) \in d$, gọi A' đối xứng với A qua M khi đó $A' \in \Delta$

Ta có M là trung điểm của AA' .

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 \\ y_{A'} = 2y_M - y_A = 2 \cdot 2 - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3;2)$$

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $1 \cdot (x+3) - 2 \cdot (y-2) = 0$ hay $x-2y+7=0$.

Cách 2: Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng d , $A'(x; y)$ là điểm đối xứng với A qua M .

Khi đó M là trung điểm của AA' suy ra

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_0 + x}{2} \\ y_M = \frac{y_0 + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \frac{x_0 + x}{2} \\ 2 = \frac{y_0 + y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 - x \\ y_0 = 4 - y \end{cases}$$

Ta có $A \in d \Rightarrow x_0 - 2y_0 + 3 = 0$ suy ra $(-2-x) - 2(4-y) + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 7 = 0$

Vậy phương trình tổng quát của Δ đối xứng với đường thẳng d qua M là $x-2y+7=0$.

Ví dụ 3: Biết hai cạnh của một hình bình hành có phương trình $x-y=0$ và $x+3y-8=0$, tọa độ một đỉnh của hình bình hành là $(-2;2)$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải

Đặt tên hình bình hành là $ABCD$ với $A(-2;2)$, do tọa độ điểm A không là nghiệm của hai phương trình đường thẳng trên nên ta giả sử $BC: x-y=0$, $CD: x+3y-8=0$

Vì $AB \parallel CD$ nên cạnh AB nhận $\vec{n}_{CD}(1;3)$ làm VTPT do đó có phương trình là $1 \cdot (x+2) + 3 \cdot (y-2) = 0$ hay $x+3y-4=0$

Tương tự cạnh AD nhận $\vec{n}_{BC}(1;-1)$ làm VTPT do đó có phương trình là $1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (y-2) = 0$ hay $x-y+4=0$

Ví dụ 4: Cho điểm $M(1;4)$. Viết phương trình đường thẳng qua M lần lượt cắt hai tia Ox , tia Oy tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải:

Giả sử $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $a > 0$, $b > 0$. Khi đó đường thẳng đi qua A, B có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Do $M \in AB$ nên $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$

Mặt khác $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}ab$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có $1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{4}{ab}} \Rightarrow ab \geq 16 \Rightarrow S_{OAB} \geq 8$

Suy ra S_{OAB} nhỏ nhất khi $\frac{1}{a} = \frac{4}{b}$ và $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$ do đó $a=2; b=8$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$ hay $4x+y-8=0$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.1: Cho điểm $A(1;-3)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua A và

- vuông góc với trục tung
- song song với đường thẳng $d: x+2y+3=0$

Hướng dẫn giải

- $\Delta \perp Oy \Rightarrow \Delta$ nhận $\vec{j}(0;1)$ làm VTPT do đó phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y+3) = 0$ hay $y+3=0$.

b) $\Delta // d \Rightarrow \Delta$ nhận $\vec{n}(1;2)$ làm VTPT do đó phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $1.(x-1)+2.(y+3)=0$ hay $x+2y+5=0$.

Bài 3.2: Cho tam giác ABC biết $A(2;1)$, $B(-1;0)$, $C(0;3)$.

- Viết phương trình tổng quát của đường cao AH
- Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.
- Viết phương trình tổng quát đường thẳng BC.
- Viết phương trình tổng quát đường thẳng qua A và song song với đường thẳng BC.

Hướng dẫn giải

a) Ta có đường cao AH đi qua A và nhận $\overline{BC}(1;3)$ là VTPT nên có phương trình tổng quát là $1.(x-2)+3.(y-1)=0$ hay $x+3y-5=0$.

b) Gọi I là trung điểm AB khi đó

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Đường trung trực đoạn thẳng AB đi qua I và nhận $\overline{AB}(-3;-1)$ làm VTPT

nên có phương trình tổng quát là $-3.\left(x-\frac{1}{2}\right)-1.\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$ hay $3x+y-2=0$

c) Phương trình tổng quát của đường thẳng BC có dạng $\frac{x}{-1} + \frac{y}{3} = 1$ hay $3x-y+3=0$.

d) Đường thẳng BC có VTPT là $\vec{n}(3;-1)$ do đó vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng BC nên nhận $\vec{n}(3;-1)$ làm VTPT do đó có phương trình tổng quát là $3.(x-2)-1.(y-1)=0$ hay $3x-y-5=0$.

Bài 3.3: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

- Δ đi qua điểm $M(2;5)$ và song song với đường thẳng $d: 4x-7y+3=0$
- Δ đi qua $P(2;-5)$ và có hệ số góc $k=11$.

Hướng dẫn giải

a) Vì $\Delta // d$ nên VTPT của d cũng là VTPT của Δ nên đường thẳng Δ nhận $\vec{n}(4;-7)$ làm VTPT và $\vec{u}(7;4)$ làm VTCP

Do đó phương trình tổng quát là $4(x-2)-7(y-5)=0$ hay $4x-7y-27=0$;

b) Đường thẳng Δ có hệ số góc $k=11$ nên có dạng $y=11x+m$. Mặt khác $P \in \Delta$ nên $-5=11.2+m \Leftrightarrow m=-27$

Vậy phương trình tổng quát của Δ là $11x-y-27=0$

Bài 3.4: Cho $M(8;6)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt chiều dương hai trục toạ độ tại A, B sao cho $OA+OB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a;0)$, $B(0;b)$ ($a, b > 0$). Vậy đường thẳng cần tìm có dạng :

$$\Delta: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \text{ Vì } M \in \Delta \Rightarrow \frac{8}{a} + \frac{6}{b} = 1 \Rightarrow b = \frac{6a}{a-8}$$

$$\text{Ta có: } OA+OB = a+b = a + \frac{6a}{a-8} = a-8 + \frac{48}{a-8} + 14 \geq 8\sqrt{3} + 14$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow a = 8+4\sqrt{3}, b = 6+4\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } \Delta: \frac{x}{8+4\sqrt{3}} + \frac{y}{6+4\sqrt{3}} = 1$$

DẠNG TOÁN 2: XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0; d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

$$\text{Ta xét hệ } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

+ Hệ (I) vô nghiệm suy ra $d_1 // d_2$.

+ Hệ (I) vô số nghiệm suy ra $d_1 \equiv d_2$

+ Hệ (I) có nghiệm duy nhất suy ra d_1 và d_2 cắt nhau và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

Chú ý: Với trường hợp $a_2, b_2, c_2 \neq 0$ khi đó

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối các cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1: x+y-2=0; \quad \Delta_2: 2x+y-3=0$

b) $\Delta_1: -x-2y+5=0; \quad \Delta_2: 2x+4y-10=0$

c) $\Delta_1: 2x - 3y + 5 = 0$; $\Delta_2: x - 5 = 0$
d) $\Delta_1: 2x + 3y + 4 = 0$; $\Delta_2: -4x - 6y = 0$

Lời giải:

- a) Ta có $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2
b) Ta có $\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{5}{-10}$ suy ra Δ_1 trùng Δ_2
c) Ta có $\frac{1}{2} \neq \frac{0}{-3}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2
d) Ta có $\frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} \neq \frac{0}{4}$ suy ra $\Delta_1 // \Delta_2$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, BC, CA là

AB: $2x - y + 2 = 0$; BC: $3x + 2y + 1 = 0$; CA: $3x + y + 3 = 0$.

Xác định vị trí tương đối của đường cao kẻ từ đỉnh A và đường thẳng $\Delta: 3x - y - 2 = 0$

Lời giải:

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 3x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 0)$

Ta xác định được hai điểm thuộc đường thẳng BC là M(-1; 1), N(1; -2)

Đường cao kẻ từ đỉnh A vuông góc với BC nên nhận vector $\overrightarrow{MN}(2; -3)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $2(x + 1) - 3y = 0$ hay $2x - 3y + 2 = 0$

Ta có $\frac{3}{2} \neq \frac{-1}{-3}$ suy ra hai đường thẳng cắt nhau.

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng

$\Delta_1: (m - 3)x + 2y + m^2 - 1 = 0$ và $\Delta_2: -x + my + (m - 1)^2 = 0$

- a) Xác định vị trí tương đối và xác định giao điểm (nếu có) của Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp $m = 0$, $m = 1$
b) Tìm m để hai đường thẳng song song với nhau.

Lời giải:

a) Với $m = 0$ xét hệ $\begin{cases} -3x + 2y - 1 = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm có tọa độ (1; 2)

Với $m = 1$ xét hệ $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2 tại gốc tọa độ

- b) Với $m = 0$ hoặc $m = 1$ theo câu a hai đường thẳng cắt nhau nên không thỏa mãn
Với $m \neq 0$ và $m \neq 1$ hai đường thẳng song song khi và chỉ khi

$$\frac{m - 3}{-1} = \frac{2}{m} \neq \frac{m^2 - 1}{(m - 1)^2} \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy với $m = 2$ thì hai đường thẳng song song với nhau.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác trong trường hợp sau

- a) Biết A(2; 2) và hai đường cao có phương trình $d_1: x + y - 2 = 0$; $d_2: 9x - 3y + 4 = 0$.
b) Biết A(4; -1), phương trình đường cao kẻ từ B là $\Delta: 2x - 3y = 0$; phương trình trung tuyến đi qua đỉnh C là $\Delta': 2x + 3y = 0$

Lời giải:

- a) Tọa độ điểm A không là nghiệm của phương trình d_1, d_2 suy ra $A \notin d_1, A \notin d_2$ nên ta có thể giả sử $B \in d_1, C \in d_2$

Ta có AB đi qua A và vuông góc với d_2 nên nhận $\vec{u} = (3; 9)$ làm VTPT nên có phương trình là $3(x - 2) + 9(y - 2) = 0$ hay $3x + 9y - 24 = 0$; AC đi qua A và vuông góc với d_1 nên nhận $\vec{v}(-1; 1)$ làm VTPT nên có phương trình là $-1(x - 2) + 1(y - 2) = 0$ hay $x - y = 0$

B là giao điểm của d_1 và AB suy ra tọa độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + 9y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 3)$$

Tương tự tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 9x - 3y + 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Vậy A(2; 2), B(-1; 3) và $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

- b) Ta có AC đi qua A(4; -1) và vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u}(3; 2)$ làm VTPT nên có phương trình là $3(x - 4) + 2(y + 1) = 0$ hay $3x + 2y - 10 = 0$

Suy ra tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(6; -4)$

Giả sử B($x_B; y_B$) suy ra trung điểm A(0; 3) của AB thuộc đường thẳng

B, C do đó $2 \cdot \frac{x_B + 4}{2} + 3 \cdot \frac{y_B - 1}{2}$ hay $2x_B + 3y_B + 5 = 0$ (1)

Mặt khác $B \in \Delta$ suy ra $2x_B - 3y_B = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B\left(-\frac{5}{4}; -\frac{5}{6}\right)$. Vậy $A(4; -1)$, $B\left(-\frac{5}{4}; -\frac{5}{6}\right)$ và $C(6; -4)$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài 3.5: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d_1: x + y - 3 = 0$; $d_2: 2x + 2y = 0$

b) $d_1: -4x + 6y - 2 = 0$; $d_2: 2x - 3y + 1 = 0$

c) $d_1: 3x + 2y - 1 = 0$; $d_2: x + 3y - 4 = 0$

Hướng dẫn giải

a) $d_1 // d_2$ b) $d_1 \equiv d_2$ c) d_1 cắt d_2

Bài 3.6: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x - y - 3 = 0$, $\Delta_2: x + y + 2 = 0$ và điểm $M(0; 2)$

a) Tìm tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 .

b) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại A và B sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng AM

Hướng dẫn giải

a) $N\left(\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}\right)$

b) $A \in \Delta_1 \Rightarrow 3x_A - y_A - 3 = 0 \Rightarrow y_A = 3x_A - 3$,

$B \in \Delta_2 \Rightarrow x_B + y_B + 2 = 0 \Rightarrow y_B = -x_B - 2$.

B là trung điểm AM

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 2x_B = x_A \\ -4x_B - 4 = 2 + 3x_A - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -\frac{3}{4} \\ x_B = -\frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \Delta: 29x - 3y + 6 = 0$$

Bài 3.7: Cho hai đường thẳng có phương trình:

$\Delta_1: (a - b)x + y = 1$; $\Delta_2: (a^2 - b^2)x + ay = b$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

a) Tìm quan hệ giữa a và b để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau

b) Tìm điều kiện giữa a và b để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm thuộc trục hoành.

Hướng dẫn giải

a) Nếu $a = b \Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2$, Nếu $a \neq b \Rightarrow \Delta_1$ và Δ_2 cắt nhau

$\Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a - b} \neq \frac{1}{a} \Leftrightarrow b \neq 0$. Vậy $b \neq 0$ và $a \neq b$ là điều kiện cần tìm.

b) Cho $y = 0 \Rightarrow (a - b)x = 1$ và $(a^2 - b^2)x = b$ suy ra $\frac{1}{a - b} = \frac{b}{a^2 - b^2} \Leftrightarrow a = 0$

Bài 3.8: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: mx - y + 1 - m = 0$; $\Delta_2: -x + my + 2 = 0$

Biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Hướng dẫn giải

TH1: Nếu $m = 0 \Rightarrow \Delta_1$ cắt Δ_2

TH2: Nếu $m \neq 0$:

th1: $\frac{m}{-1} \neq \frac{-1}{m} \Leftrightarrow m \neq \pm 1 \Rightarrow \Delta_1$ cắt Δ_2

th2: $\frac{m}{-1} = \frac{-1}{m} \neq \frac{1 - m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ thì $\Delta_1 // \Delta_2$

th3: $\frac{m}{-1} = \frac{-1}{m} = \frac{1 - m}{2} \Leftrightarrow m = -1$ thì $\Delta_1 \equiv \Delta_2$

Bài 3.9: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các điểm $A(0; 1)$, $B(2; -1)$ và các đường thẳng

$d_1: (m - 1)x + (m - 2)y + 2 - m = 0$, $d_2: (2 - m)x + (m - 1)y + 3m - 5 = 0$

a) Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau.

b) Gọi P là giao điểm của d_1 và F_1, F_2 . Tìm m sao cho $PA + PB$ lớn nhất.

Hướng dẫn giải

$(PA + PB)^2 \leq 2(PA^2 + PB^2) = 2AB^2 = 16$.

Do đó $\max(PA + PB) = 4$ khi P là trung điểm của cung AB .

Khi đó $P(2; 1)$ hay $P(0; -1)$ suy ra $m = 1$ hoặc $m = 2$.

Bài 3.10: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng

$\Delta_m: mx + y - m - 1 = 0$, $\Delta_m: x - my - 3 - m = 0$, (với m là tham số thực).

Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì hai đường thẳng đó luôn cắt nhau tại 1 điểm nằm trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải

Để ý rằng hai đường thẳng này vuông góc với nhau nên cắt nhau tại điểm M . Rõ ràng đường thẳng thứ nhất đi qua điểm cố định $A(1; 1)$ và đường thẳng thứ hai đi qua điểm cố định $B(3; -1)$, nên tập hợp điểm M là đường tròn đường kính AB .

Bài 3.11: Tam giác ABC biết $AB: 5x - 2y + 6 = 0$ và $AC: 4x + 7y - 21 = 0$ và

$H(0; 0)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm A, B .

Hướng dẫn giải

Tọa độ của A là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} 5x - 2y + 6 = 0 \\ 4x + 7y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(0; 3)$

$$\text{Vì } B(a;b) \text{ thuộc } AB \text{ nên } 5a - 2b + 6 = 0 \Rightarrow b = \frac{5a+6}{2} \text{ hay } B\left(a; \frac{5a+6}{2}\right)$$

Mặt khác, H là trực tâm nên $HB \perp AC$ suy ra $\overline{HB}$ là VTPT của AC do đó $\overline{HB}$ cùng phương với $\overline{n_{AC}}(4;7) \Leftrightarrow \frac{a}{4} = \frac{5a+6}{14} = 0 \Leftrightarrow a = -4 \Rightarrow B(-4;-7)$

Bài 3.12: Cho điểm $A(2;1)$ và đường thẳng $d: 3x - y + 3 = 0$. Tìm hình chiếu của A lên d.

Hướng dẫn giải

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với d. Ta có hệ số góc của đường thẳng d là $k_d = 3$ do đó hệ số góc của đường thẳng Δ là $k_\Delta = -\frac{1}{3}$

Do đó đường thẳng Δ có dạng $y = -\frac{1}{3}x + m$.

$$A \in \Delta \Rightarrow 1 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + m \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } \Delta: y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \text{ hay } x + 3y - 5 = 0.$$

$$\text{Tọa độ giao điểm của } \Delta \text{ và } d \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 3x - y + 3 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra hình chiếu của A lên d là } A'\left(-\frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right)$$

Bài 3.13: Cho tam giác ABC biết $A(-4;6)$, $B(-1;2)$ và đường phân giác trong CK có phương trình là $3x + 9y - 22 = 0$. Tính tọa độ đỉnh C của tam giác.

Hướng dẫn giải

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với CK cắt CK và CB lần lượt tại A_1 , A_2 . Đường thẳng A_1A_2 (hay AA_2) có phương trình là $3x - y + 18 = 0$

Tọa độ điểm A_1 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 9y - 22 = 0 \\ 3x - y + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1\left(-\frac{14}{3}; 4\right) \Rightarrow A_2\left(-\frac{16}{3}; 2\right)$$

Cạnh BC (hay BA_2) có phương trình là $y - 2 = 0$

$$\text{Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ } \begin{cases} 3x + 9y - 22 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{4}{3}; 2\right)$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương và phương trình tham số của đường thẳng:

a. Định nghĩa vectơ chỉ phương:

Cho đường thẳng Δ . Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ .

Nhận xét:

Nếu $\vec{u}$ là VTCP của Δ thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là VTCP của Δ .

VTPT và VTCP vuông góc với nhau. Do vậy nếu Δ có VTCP $\vec{u} = (a;b)$ thì $\vec{n} = (-b;a)$ là một VTPT của Δ .

b. Phương trình tham số của đường thẳng:

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và $\vec{u} = (a;b)$ là VTCP.

$$\text{Khi đó } M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \overline{MM_0} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. (1)$$

Hệ (1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ , t gọi là tham số

Nhận xét: Nếu Δ có phương trình tham số là (1) khi đó

$$A \in \Delta \Leftrightarrow A(x_0 + at; y_0 + bt)$$

2. Phương trình chính tắc của đường thẳng.

Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và $\vec{u} = (a;b)$ (với $a \neq 0, b \neq 0$) là

vectơ chỉ phương thì phương trình $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ VÀ CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

• Để viết phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định

- Điểm $A(x_0; y_0) \in \Delta$

- Một vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b)$ của Δ

Khi đó phương trình tham số của Δ là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

• Để viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta cần xác định

- Điểm $A(x_0; y_0) \in \Delta$

- Một vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b)$, $ab \neq 0$ của Δ

Phương trình chính tắc của đường thẳng $2b = \sqrt{28} \Rightarrow b^2 = 7, a^2 = c^2 - b^2 = 9$

$$\text{là } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

(trường hợp $2c = 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc)

Chú ý:

- o Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì chúng có cùng VTCP và VTPT.
- o Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì VTCP của đường thẳng này là VTPT của đường thẳng kia và ngược lại
- o Nếu $y = \pm \frac{4}{3}x$ có VTCP $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ thì $b^2 = \frac{16}{9}a^2$ là một VTPT của $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 16$.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho điểm $A(1; -3)$ và $B(-2; 3)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

- Δ đi qua A và nhận vector $\vec{n}(1; 2)$ làm vector pháp tuyến
- Δ đi qua gốc tọa độ và song song với đường thẳng AB
- Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB

Lời giải:

- Vì Δ nhận vector $\vec{n}(1; 2)$ làm vector pháp tuyến nên VTCP của Δ là $\vec{u}(-2; 1)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{cases}$

- Ta có $\vec{AB}(-3; 6)$ mà Δ song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{u}(-1; 2)$ làm VTCP

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\Delta: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t \end{cases}$

- Vì Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên nhận $\vec{AB}(-3; 6)$ làm VTPT và đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Ta có $I(-\frac{1}{2}; 0)$ và Δ nhận $\vec{u}(-1; 2)$ làm VTCP nên phương trình tham số

của đường thẳng Δ là $\Delta: \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - t \\ y = 2t \end{cases}$

Ví dụ 2: Viết phương trình tổng quát, tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

- Δ đi qua điểm $A(3; 0)$ và $B(1; 3)$

- Δ đi qua $N(3; 4)$ và vuông góc với đường thẳng $d': \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$

Lời giải:

- Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B nên nhận $\vec{AB} = (-2; 3)$ làm vector chỉ

phương do đó phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3t \end{cases}$; phương trình chính tắc

là $\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{3}$; phương trình tổng quát là $3(x-3) = -2y$ hay $3x + 2y - 9 = 0$

- $\Delta \perp d'$ nên VTCP của d' cũng là VTPT của Δ nên đường thẳng Δ nhận $\vec{u}(-3; 5)$ làm VTPT và $\vec{v}(-5; -3)$ làm VTCP do đó phương trình tổng quát là $-3(x-3) + 5(y-4) = 0$ hay $3x - 5y + 11 = 0$; phương trình tham số là

$\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$; phương trình chính tắc là $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{-3}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$ và $C(1; -5)$.

- Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác.
- Viết phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM .
- Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm D , G với D là chân đường phân giác trong góc A và G là trọng tâm của ΔABC .

Lời giải:

- Ta có $\vec{BC}(-1; -8)$ suy ra đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình là

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 8t \end{cases}$$

- M là trung điểm của BC nên $M(\frac{3}{2}; -1)$ do đó đường thẳng chứa đường

trung tuyến AM nhận $\vec{AM}(\frac{7}{2}; -2)$ làm VTCP

Nên có phương trình là $\begin{cases} x = -2 + \frac{7}{2}t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

- Gọi $D(x_D; y_D)$ là chân đường phân giác hạ từ A của tam giác ABC

Ta có $\vec{BD} = \frac{AB}{AC} \vec{DC}$

Mà $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$ và $AC = \sqrt{(1+2)^2 + (-5-1)^2} = 3\sqrt{5}$

Suy ra

$$\overline{BD} = \frac{AB}{AC} \overline{DC} = \frac{2}{3} \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = \frac{2}{3}(1 - x_D) \\ y_D - 3 = \frac{2}{3}(-5 - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{8}{5} \\ y_D = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{8}{5}; -\frac{1}{5}\right)$$

$G\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có $\overline{DG}\left(-\frac{19}{15}; -\frac{2}{15}\right)$ suy ra đường thẳng DG nhận $\vec{u} = (19; 2)$ làm VTCP

nên có phương trình là
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + 19t \\ y = -\frac{1}{3} + 2t \end{cases}$$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC biết AB: $x + y - 1 = 0$, AC: $x - y + 3 = 0$ và trọng tâm G(1; 2). Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Lời giải:

Ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 2)$

Gọi M(x; y) là trung điểm của BC

Vì G là trọng tâm nên $\overline{AG} = 2\overline{GM}$, $\overline{AG}(2; 0)$, $\overline{GM}(x - 1; y - 2)$

Suy ra $\begin{cases} 2 = 2(x - 1) \\ 0 = 2(y - 2) \end{cases} \Rightarrow M(2; 2)$

$B(x_B; y_B) \in AB \Rightarrow x_B + y_B - 1 = 0 \Rightarrow y_B = 1 - x_B$ do đó $B(x_B; 1 - x_B)$

$C(x_0; y_0) \in AC \Rightarrow x_0 - y_0 + 3 = 0 \Rightarrow y_0 = x_0 + 3$ do đó $C(x_C; x_C + 3)$

Mà M là trung điểm của BC nên ta có

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_0}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_0 = 4 \\ x_0 - x_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy $B(2; -1)$, $C(2; 5) \Rightarrow \overline{BC}(0; 6)$ suy ra phương trình đường thẳng BC là

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.14. Cho điểm A(2; -2) và B(0; 1). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

- Δ đi qua A và nhận vector $\vec{u}(1; 2)$ làm vector chỉ phương
- Δ đi qua A và nhận vector $\vec{n}(4; 2)$ làm vector pháp tuyến
- Δ đi qua C(1; 1) và song song với đường thẳng AB
- Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB

Hướng dẫn giải

a) Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

b) Vì Δ nhận vector $\vec{n}(4; 2)$ làm vector pháp tuyến nên VTCP của Δ là $\vec{u}(-1; 2)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) Ta có $\overline{AB}(-2; 3)$ mà Δ song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{u}(-2; 3)$ làm VTCP

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

d) Vì Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên nhận $\overline{AB}(-2; 3)$ làm VTPT và đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Ta có $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$ và Δ nhận $\vec{u}(3; 2)$ làm VTCP nên phương trình tham số của

đường thẳng Δ là $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = \frac{1}{2} + 2t \end{cases}$

Bài 3.15: Viết phương trình tổng quát, tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

- Δ đi qua điểm A(3; 0) và B(-1; 0)
- Δ đi qua M(1; 2) và vuông góc với đường thẳng d: $x - 3y - 1 = 0$.
- Δ đi qua gốc tọa độ và song song với đường thẳng $\Delta': \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B nên nhận $\overline{AB} = (-4; 0)$ làm vector chỉ

phương do đó phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 0 \end{cases}$

- Phương trình chính tắc không có; phương trình tổng quát là $y = 0$
- b) $\Delta \perp d$ nên VTPT của d cũng là VTCP của Δ nên đường thẳng Δ nhận $\vec{u}(1; -3)$ làm VTCP nên phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$; phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3}$; phương trình tổng quát là $3x + y - 5 = 0$
- c) $\Delta // \Delta'$ nên VTCP của Δ' cũng là VTCP của Δ nên đường thẳng Δ nhận $\vec{u}(3; 2)$ làm VTCP nên phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \end{cases}$; phương trình chính tắc là $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$; phương trình tổng quát là $2x - y = 0$

Bài 3.16: Cho tam giác ABC có $A(2; -1)$, $B(-2; -3)$ và $C(-1; 5)$.

- Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh của tam giác.
- Viết phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua trung điểm AB và trọng tâm của tam giác ABC

Hướng dẫn giải

- a) Ta có $\overline{AB}(-4; -2)$ suy ra đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình là $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$

$\overline{BC}(1; 8)$ suy ra đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình là $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -3 + 8t \end{cases}$

$\overline{CA}(3; -6)$ suy ra đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 6t \end{cases}$

- b) M là trung điểm của BC nên $M(-\frac{3}{2}; 1)$ do đó đường thẳng chứa đường

trung tuyến AM nhận $\overline{AM}(-\frac{7}{2}; 2)$ làm VTCP nên có phương trình là

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{7}{2}t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

- c) Trung điểm của AB là $I(0; -2)$, trọng tâm của tam giác ABC là $G(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

Khi đó ta có $\overline{IG}(-\frac{1}{3}; \frac{7}{3})$ do đó $IG: \begin{cases} x = -t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$

Bài 3.17. Cho tam giác ABC biết $A(1; 4)$, $B(3; -1)$ và $C(6; -2)$.

- Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB.
- Viết phương trình đường cao AH.
- Viết phương trình đường trung tuyến của tam giác đó AM.
- Viết phương trình đường trung trực cạnh BC.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác và song song với trục hoành.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua trung điểm BC và vuông góc với trục tung.
- Viết phương trình đường thẳng đi qua A và tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân đỉnh là gốc tọa độ.
- Đường thẳng qua C và chia tam giác thành hai phần, phần chứa điểm A có diện tích gấp đôi phần chứa điểm B.

Hướng dẫn giải

- a) $AB: 5x + 2y - 13 = 0$.

- b) $AH: 3x - y + 1 = 0$

- c) Gọi M là trung điểm của BC

$$\text{nên } M = \left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right), \overline{AM} = (7; -11) \Rightarrow AM: 11x + 7y - 39 = 0.$$

- d) $3x - y - 12 = 0$.

- e) Trọng tâm của tam giác $G = \left(\frac{10}{3}; \frac{1}{3}\right)$ suy ra đường thẳng cần tìm là $y = \frac{1}{3}$.

- f) Đường thẳng đi qua M và vuông góc với trục tung có dạng là: $y = -\frac{3}{2}$.

- g) $x + y - 5 = 0$.

- h) Lấy $K \in AB$ sao cho $AK = 2BK \rightarrow K = \left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

$$\text{Khi đó } \overline{CK} = (-11; 8) \rightarrow CK: 8x + 11y - 26 = 0.$$

Bài 3.18. Viết phương trình đường thẳng qua $M(3; 2)$ và cắt tia Ox tại A, tia Oy tại B sao cho:

- a) $OA + OB = 12$

- b) Diện tích tam giác OAB bằng 12

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $a > 0$, $b > 0$. phương trình Δ cần tìm có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Mặt khác $OA = a, OB = b$

a) $\Delta_1: x + 3y - 9 = 0$; $\Delta_2: 2x + y - 8 = 0$

b) $\Delta: 2x + 3y - 12 = 0$

Bài 3.19. Cho hình bình hành hai cạnh có phương trình

$$3x - y - 2 = 0 \text{ và } x + y - 2 = 0.$$

Viết phương trình hai cạnh còn lại biết tâm hình bình hành là $I(3; 1)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $AB: 3x - y - 2 = 0$, $AD: x + y - 2 = 0$.

Khi đó $A(1; 1) \Rightarrow C(5; 1)$, $CD: 3x - y - 14 = 0$, $AD: x + y - 6 = 0$

Bài 3.20. Cho tam giác ABC có trung điểm của AB là $I(1; 3)$, trung điểm AC là $J(-3; 1)$. Điểm A thuộc Oy và đường BC qua gốc tọa độ O . Tìm tọa độ điểm A , phương trình BC và đường cao vẽ từ B .

Hướng dẫn giải

$A(0; a) \Rightarrow B(2; 6 - a)$, $C(-6; 2 - a)$. BC đi qua gốc tọa độ nên $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$ cùng phương suy ra $2(2 - a) = (6 - a)(-6) \Leftrightarrow a = 5$

DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để xác định tọa độ điểm thuộc đường thẳng ta dựa vào nhận xét sau:

- Điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
(hoặc $\Delta: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$) có dạng $A(x_0 + at; y_0 + bt)$
- Điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ (đk: $a^2 + b^2 \neq 0$) có dạng $A\left(t; \frac{-at - c}{b}\right)$ với $b \neq 0$ hoặc $A\left(\frac{-bt - c}{a}; t\right)$ với $a \neq 0$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 12 = 0$

- Tìm tọa độ điểm A thuộc Δ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 4
- Tìm điểm B thuộc Δ và cách đều hai điểm $E(5; 0)$, $F(3; -2)$
- Tìm tọa độ hình chiếu của điểm $M(1; 2)$ lên đường thẳng Δ

Lời giải:

- Để thấy $M(0; -3)$ thuộc đường thẳng Δ và $\vec{u}(4; 3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

Điểm A thuộc Δ nên tọa độ của điểm A có dạng $A(4t; -3 + 3t)$ suy ra

$$OA = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(4t)^2 + (-3 + 3t)^2} = 4 \Leftrightarrow 25t^2 - 18t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{7}{25} \end{cases}$$

Vậy ta tìm được hai điểm là $A_1(4; 0)$ và $A_2\left(-\frac{28}{25}; -\frac{96}{25}\right)$.

- Vì $B \in \Delta$ nên $B(4t; -3 + 3t)$

Điểm B cách đều hai điểm $E(5; 0)$, $F(3; -2)$ suy ra

$$EB^2 = FB^2 \Leftrightarrow (4t - 5)^2 + (3t - 3)^2 = (4t - 3)^2 + (3t - 1)^2 \Leftrightarrow t = \frac{6}{7}$$

Suy ra $B\left(\frac{24}{7}; -\frac{3}{7}\right)$

- Gọi H là hình chiếu của M lên Δ khi đó $H \in \Delta$ nên $H(4t; -3 + 3t)$

Ta có $\vec{u}(4; 3)$ là vectơ chỉ phương của Δ và vuông góc với $\overrightarrow{HM}(4t - 1; 3t - 5)$

nên $\overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4(4t - 1) + 3(3t - 5) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{19}{25}$

Suy ra $H\left(\frac{76}{25}; -\frac{18}{25}\right)$

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng $\Delta: x - 2y + 6 = 0$ và $\Delta': \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \end{cases}$.

- Xác định tọa độ điểm đối xứng với điểm $A(-1; 0)$ qua đường thẳng Δ
- Viết phương trình đường thẳng đối xứng với Δ' qua Δ

Lời giải:

- Gọi H là hình chiếu của A lên Δ khi đó $H(2t - 6; t)$

Ta có $\vec{u}(2; 1)$ là vectơ chỉ phương của Δ và vuông góc với $\overrightarrow{AH}(2t - 5; t)$ nên $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 5) + t = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(-2; 2)$

A' là điểm đối xứng với A qua Δ suy ra H là trung điểm của AA' do đó

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 4 \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $A'(-3; 4)$

- Thay $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \end{cases}$ vào phương trình Δ ta được $-1 - t - 2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$ suy

ra giao điểm của Δ và Δ' là $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right)$

Để thấy điểm A thuộc đường thẳng Δ' do đó đường thẳng đối xứng với Δ' qua Δ đi qua điểm A' và điểm K do đó nhận $\overline{A'K} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}(1; -7)$ nên

có phương trình là
$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 - 7t \end{cases}$$

Nhận xét: Để tìm tọa độ hình chiếu H của A lên Δ ta có thể làm cách khác như sau: ta có đường thẳng AH nhận $\vec{u}(2;1)$ làm VTPT nên có phương trình là $2x + y + 2 = 0$ do đó tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-2; 2)$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông ở A. Biết $A(-1; 4)$, $B(1; -4)$, đường thẳng BC đi qua điểm $K\left(\frac{7}{3}; 2\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Lời giải:

Ta có $\overline{BK}\left(\frac{4}{3}; 6\right)$ suy ra đường thẳng BC nhận $\vec{u}(2; 9)$ làm VTCP

Nên có phương trình là
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 9t \end{cases}$$

$C \in BC \Rightarrow C(1 + 2t; -4 + 9t)$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$, $\overline{AB}(2; -8)$, $\overline{AC}(2 + 2t; -8 + 9t)$ suy ra $2(2 + 2t) - 8(9t - 8) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy $C(3; 5)$

Ví dụ 4: Cho hình bình hành ABCD. Biết $I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh CD, $D\left(3; \frac{3}{2}\right)$ và đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ có phương trình là $\Delta: x - y + 1 = 0$. Xác định tọa độ đỉnh B.

Lời giải:

Cách 1: Điểm I là trung điểm của CD nên
$$\begin{cases} x_0 = 2x_I - x_D = 4 \\ y_0 = 2y_I - y_D = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(4; \frac{7}{2}\right)$$

Vì $A \in \Delta$ nên tọa độ điểm A có dạng $A(a; a + 1)$

Mặt khác ABCD là hình bình hành tương đương với $\overline{DA}, \overline{DC}$ không cùng phương và $\overline{AB} = \overline{DC}$

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - a = 4 - 3 \\ y_B - a - 1 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = a + 1 \\ y_B = a + 3 \end{cases} \Rightarrow B(a + 1; a + 3)$$

$\overline{DA}, \overline{DC}$ không cùng phương khi và chỉ khi $\frac{a-3}{1} \neq \frac{a+1-\frac{3}{2}}{2} \Leftrightarrow a \neq \frac{11}{2}$

Đường thẳng Δ là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nhận vector $\vec{u} = (1; 1)$ làm vector chỉ phương nên $\cos(\overline{AB}; \vec{u}) = \cos(\overline{AC}; \vec{u}) \Leftrightarrow \frac{\overline{AB} \cdot \vec{u}}{|\overline{AB}| |\vec{u}|} = \frac{\overline{AC} \cdot \vec{u}}{|\overline{AC}| |\vec{u}|}$ (*)

Có $\overline{AB}(1; 2)$, $\overline{AC}\left(4 - a; \frac{5}{2} - a\right)$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{13}{2} - 2a}{\sqrt{(4-a)^2 + \left(\frac{5}{2}-a\right)^2}} \Leftrightarrow 2a^2 - 13a + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{11}{2} \end{cases} (1)$$

Vậy tọa độ điểm B(2; 4)

Cách 2: Ta có $C\left(4; \frac{7}{2}\right)$.

Đường thẳng d đi qua C vuông góc với Δ nhận $\vec{u} = (1; 1)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là

$$1 \cdot (x - 4) + 1 \cdot \left(y - \frac{7}{2}\right) = 0 \text{ hay } 2x + 2y - 15 = 0$$

Tọa độ giao điểm H của Δ và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{4} \\ y = \frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{4}; \frac{17}{4}\right)$$

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua Δ thì khi đó C' thuộc đường thẳng chứa cạnh AB và H là trung điểm của CC' do đó

$$\begin{cases} x_{O'} = 2x_H - x_0 \\ y_{O'} = 2y_H - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{O'} = \frac{5}{2} \\ y_{O'} = 5 \end{cases} \Rightarrow C'\left(\frac{5}{2}; 5\right)$$

Suy ra đường thẳng chứa cạnh AB đi qua C' và nhận $\overline{DC} = (1; 2)$ làm vector

chỉ phương nên có phương trình là
$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} + t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$$

Thay x, y từ phương trình đường thẳng chứa cạnh AB vào phương trình đường thẳng Δ ta được $\frac{5}{2} + t - 5 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}$ suy ra $A(1; 2)$

$ABCD$ là hình bình hành nên $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 1 = 1 \\ y_B - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 4 \end{cases}$

Suy ra $B(2; 4)$

Chú ý: Bài toán có liên quan đến đường phân giác thì ta thường sử dụng nhận xét " Δ là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau Δ_1 và Δ_2 khi đó điểm đối xứng với điểm $M \in \Delta_1$ qua Δ thuộc Δ_2 "

Ví dụ 5: Cho đường thẳng $d: x - 2y - 2 = 0$ và 2 điểm $A(0; 1)$ và $B(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho $|\overline{MA} + 2\overline{MB}|$ là nhỏ nhất.

Lời giải:

$M \in d \Rightarrow M(2t + 2; t), \overline{MA}(-2t - 2; 1 - t), \overline{MB}(1 - 2t; 4 - t)$

Do đó $\overline{MA} + 2\overline{MB} = (-6t; -3t + 9)$

Suy ra $|\overline{MA} + 2\overline{MB}| = \sqrt{(-6t)^2 + (-3t + 9)^2} = \sqrt{45\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{314}{5}} \geq \sqrt{\frac{314}{5}}$

$|\overline{MA} + 2\overline{MB}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \frac{3}{5}$ do đó $M\left(\frac{16}{5}; \frac{3}{5}\right)$ là điểm cần tìm.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.21: Cho hai đường thẳng $d_1: x - y = 0$ và $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông $ABCD$ biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

Hướng dẫn giải

$A \in d_1, C \in d_2, B, D$ thuộc trục hoành suy ra

$A(a; a), C(c; 1 - 2c), B(b; 0), D(d; 0)$

Vì $ABCD$ là hình vuông và B, D thuộc trục hoành nên A và C đối xứng nhau qua trục hoành do đó $\begin{cases} a = c \\ a = 2c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = c = 1$. Suy ra $A(1; 1), C(1; -1)$

$ABCD$ là hình vuông suy ra $BA \perp BC$ và trung điểm của AC trùng với trung điểm của BD

$BA \perp BC \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow (1 - b)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \end{cases} \quad (1)$

Trung điểm của AC trùng trung điểm của BD nên $b + d = 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} b = 0 \\ d = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b = 2 \\ d = 0 \end{cases}$

Vậy có hai hình vuông thỏa mãn có tọa độ các đỉnh là $A(1; 1), B(2; 0), C(1; -1), D(0; 0)$ và $A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0)$

Bài 3.22: Cho điểm $A(2; 2)$ và các đường thẳng: $d_1: x + y - 2 = 0$, $d_2: x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Hướng dẫn giải

$B \in d_1; C \in d_2$ nên tọa độ B, C có dạng $B(a; 2 - a), C(b; 8 - b)$

$\overline{AB} = (a - 2; -a); \overline{AC} = (b - 2; 6 - b)$

Tam giác ABC vuông cân tại A nên

$\begin{cases} AB = AC \\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 2)^2 + a^2 = (b - 2)^2 + (6 - b)^2 \\ (a - 2)(b - 2) - a(6 - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(b - 4) = 2 \\ (a - 1)^2 - (b - 4)^2 = 3 \end{cases}$

Giải hệ này dễ dàng tìm được $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$

Từ đó $B(-1; 3), C(3; 5)$ hoặc $B(3; -1), C(5; 3)$

Bài 3.23: Tam giác ABC biết $A(2; -1)$ và phương trình hai đường phân giác trong của góc B và góc C lần lượt là $\Delta: x - 2y + 1 = 0, \Delta': 2x - 3y + 6 = 0$. Xác định tọa độ B, C .

Hướng dẫn giải

Điểm $A'(0; 3) \in BC$ là điểm đối xứng A qua Δ , $A''(0; 2) \in BC$ là điểm đối xứng A qua Δ'

Ta có $BC: x = 0$ suy ra $B\left(0; \frac{1}{2}\right), C\left(0; \frac{5}{3}\right)$

Bài 3.24: Cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$ và hai điểm $A(2; 5)$ và $B(-4; 5)$.

Tìm tọa độ điểm M trên Δ sao cho

- $2MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất
- $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất
- $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất

Hướng dẫn giải

a) $M \in \Delta \Rightarrow M(2t - 3; t)$ suy ra

$2MA^2 + MB^2 = 15t^2 - 66t + 126 = 15\left(t - \frac{11}{5}\right)^2 + \frac{267}{5} \geq \frac{267}{5}$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow t = \frac{11}{5} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5}; \frac{11}{5}\right)$$

b) Dễ thấy A, B cùng phía với Δ . Gọi A' là điểm đối xứng A qua $\Delta \Rightarrow A'(4;1)$

Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$, dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow M \in A'B \Leftrightarrow M = A'B \cap \Delta \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$$

c) Lấy A' như câu b) suy ra $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$ dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow M = A'B \cap \Delta \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$$

Bài 3.25: Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ qua điểm I biết

a) $I(-3;1); \Delta: 2x + y - 3 = 0$

b) $I(-1;3); \Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $d(I; \Delta) = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \Delta' // \Delta \Rightarrow \Delta': 2x + y + c = 0$

$$d(I; \Delta) = d(I; \Delta') \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{|c-5|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3(1) \\ c = 13 \end{cases}$$

Vậy $\Delta': 2x + y + 13 = 0$

b) $\Delta': 2x - y + 15 = 0$

Bài 3.26: Cho hình vuông tâm $I(2;3)$ và $AB: x - 2y - 1 = 0$. Viết phương trình các cạnh còn lại và các đường chéo.

Hướng dẫn giải

Ta có $DC: x - 2y + 9 = 0; BC: 2x + y - 2 = 0;$

$AD: 2x + y - 12 = 0; AC: x + 3y - 11 = 0; BD: 3x - y - 3 = 0$

Bài 3.27: Cho tam giác ABC vuông tại A biết phương trình cạnh BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$; điểm A, B thuộc trục hoành. Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $B(1;0)$. Vì $C \in \Delta \Rightarrow C(a; \sqrt{3}(a-1))$

A, B thuộc trục hoành và tam giác ABC vuông nên $A(a;0)$

$\overline{AB} = (a-1;0), \overline{AC} = (0; \sqrt{3}(a-1))$, ABC là tam giác khi và chỉ khi $\overline{AB}, \overline{AC}$ không cùng phương hay $a \neq 1$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có $S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}AB \cdot AC$

Suy ra: $2(AB + BC + CA) = AB \cdot AC$

Mặt khác $AB = |a-1|, BC = 2|a-1|, CA = \sqrt{3}|a-1|$

nên ta có $2(3 + \sqrt{3})|a-1| = \sqrt{3}(a-1)^2$ suy ra $a = 1$ (loại), $a = 3 + 2\sqrt{3}$ hoặc $a = -1 - 2\sqrt{3}$

Vậy có hai trường hợp xảy ra ta tìm được tọa độ trọng tâm trong hai trường

hợp đó là $G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}+6}{3}\right), G_2\left(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3}; \frac{-2\sqrt{3}-6}{3}\right)$

Nhận xét:

Cách khác: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC . Vì $r = 2 \Rightarrow y_I = \pm 2$. Từ phương trình đường thẳng BC suy ra $\hat{B} = 60^\circ$ do đó

$$BI: y = \frac{x-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_I = 1 \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x_A = x_C = 3 + 2\sqrt{3} \\ x_A = x_C = -1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Từ phương trình BC ta suy ra được y_C do đó tìm được tọa độ ba đỉnh rồi suy ra tọa độ trọng tâm.

Bài 3.28: Cho tam giác ABC có $C(-2,0)$, đường phân giác trong góc A có phương trình là $5x + y - 3 = 0$ và thỏa mãn $\overline{AB} = 2\overline{OM}$ với $M(2;3)$. Tìm tọa độ điểm A, B

Hướng dẫn giải

$A(a; 3-5a) \Rightarrow B(4+a; 9-5a), \overline{u}(-1;5), \overline{AB}(4;6), \overline{AC}(-2-a; 5a-3)$

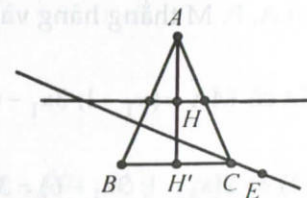
$$\cos(\overline{AB}; \overline{u}) = \cos(\overline{AC}; \overline{u}) \Leftrightarrow \frac{26}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{26a-13}{\sqrt{(2+a)^2+(5a-3)^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Chỉ có trường hợp $a = 1 \Rightarrow B(5;4)$

Bài 3.29: Cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6;6)$; đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C, biết điểm $\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{a'^2} = \frac{\alpha}{b^2} - \frac{\beta}{b'^2} = k > 0, \alpha + \beta > 0$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Hướng dẫn giải

Gọi H' là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A, H là giao điểm của đường thẳng Δ và AH. Vì $H \in \Delta$ nên $H(a; 4-a)$



Hình 3.27

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1(a-6) + 1(-2-a) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow H(2; 2)$$

(Trong đó $\vec{u}(-1; 1)$ là vectơ chỉ phương của Δ)

H là trung điểm của đoạn thẳng AH' nên $H'(-2; -2)$

Đường thẳng chứa cạnh BC đi qua H nhận $\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương nên

$$BC: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + t \end{cases}$$

$$\text{Gọi } B(-2-t; -2-t) \Rightarrow C(t-2; -2-t)$$

E nằm trên đường cao đi qua đỉnh C nên $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\text{hay } (t-3)(-8-t) + (1-t)(t-8) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } B(-6; 2), C(2; -6) \text{ hoặc } B(0; -4), C(-4; 0)$$

Bài 3.30: Cho tam giác ABC có diện tích $S = \frac{3}{2}$, tọa độ các đỉnh $A(2; -3)$,

$B(3; -2)$ và trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng có phương trình $3x - y - S = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C

Hướng dẫn giải

$$I \text{ là trung điểm } AB \text{ thì } I\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right),$$

$$S_{GAB} = \frac{1}{2} \Rightarrow GH = \frac{S_{GAB}}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}, G(a; 8-3a)$$

$$AB: x - y - 5 = 0, d(G; AB) = GH \text{ từ đó suy ra } C(-2; -10) \text{ hoặc } C(1; 1)$$

Bài 3.31: Cho điểm $M(1; 1)$ và hai đường thẳng

$$d_1: 3x - y - 5 = 0, d_2: x + y - 4 = 0.$$

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $2MA - 3MB = 0$.

Hướng dẫn giải

$$A \in d_1 \Rightarrow A(x_1; 3x_1 - 5), B \in d_2 \Rightarrow B(x_2; 4 - x_2).$$

$$\text{Vì } A, B, M \text{ thẳng hàng và } 2MA = 3MB \Rightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \\ 2\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = (x_1 - 1; 3x_1 - 6), \overrightarrow{MB} = (x_2 - 1; 3 - x_2).$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(x_1 - 1; 3x_1 - 6) = 3(x_2 - 1; 3 - x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right), B(2; 2). \text{ Suy ra phương trình } d: x - y = 0.$$

$$(2) \Leftrightarrow 2(x_1 - 1; 3x_1 - 6) = -3(x_2 - 1; 3 - x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A(1; -2), B(1; 3). \text{ Suy ra phương trình } d: x - 1 = 0.$$

Bài 3.32: Cho tam giác ABC phương trình các đường thẳng chứa đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt là $x - 2y - 13 = 0$ và $13x - 6y - 9 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C biết tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(-5; 1)$

Hướng dẫn giải

Ta có $A(-3; -8)$. Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow IM \parallel AH$.

$$\text{Ta suy ra pt } IM: x - 2y + 7 = 0.$$

$$\text{Suy ra tọa độ } M \text{ thỏa mãn } \begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 13x - 6y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3; 5).$$

$$\text{Pt đường thẳng } BC: 2(x - 3) + y - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 11 = 0.$$

$$B \in BC \Rightarrow B(a; 11 - 2a).$$

$$\text{Khi đó } IA = IB \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } B(4; 3), C(2; 7) \text{ hoặc } B(2; 7), C(4; 3).$$

Bài 3.33: Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $M(1; 4), N(-1; 3)$ là

trung điểm của BC, CA và $H\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ là trực tâm tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

$$\text{Từ giả thiết suy ra } MN \perp CH, \overrightarrow{NM}(2; 1) \Rightarrow CH: \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Gọi } C(-t; -1 + 2t) \Rightarrow A(t - 2; 7 - 2t) \Rightarrow \overrightarrow{HA}\left(t - \frac{7}{3}; \frac{26}{3} - 2t\right), \overrightarrow{CM}(t + 1; 5 - 2t)$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{7}{3}\right)(t + 1) + \left(\frac{26}{3} - 2t\right)(5 - 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 15t^2 - 86t + 123 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{41}{15} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } C(-3; 5), B(5; 3), A(1; 1) \text{ hoặc } C\left(-\frac{41}{15}; \frac{67}{15}\right), B\left(\frac{71}{15}; \frac{53}{15}\right), A\left(\frac{11}{15}; \frac{23}{15}\right).$$

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

1. Khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng:

a) Công thức tính khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng:

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và điểm $M(x_0; y_0)$. Khi đó khoảng cách

từ M đến (Δ) được tính bởi công thức: $d(M, (\Delta)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

b) Vị trí của hai điểm đối với đường thẳng.

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và $M(x_M; y_M) \notin \Delta, N(x_N; y_N) \in \Delta$.

Khi đó:

- M, N cùng phía với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$

- M, N khác phía với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$

Chú ý: Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng:

$\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

2. Góc giữa hai đường thẳng:

a) Định nghĩa: Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc. Số đo nhỏ nhất của các góc đó được gọi là số đo của góc giữa hai đường thẳng a và b, hay đơn giản là góc giữa a và b. Khi a song song hoặc trùng với b, ta quy ước góc giữa chúng bằng 0° .

b) Công thức xác định góc giữa hai đường thẳng.

Góc xác định hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ được xác định bởi công

$$\text{thức } \cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

DẠNG TOÁN 1: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để tính khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$

ta dùng công thức $d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta: 5x + 3y - 5 = 0$

a) Tính khoảng cách từ điểm $A(-1; 3)$ đến đường thẳng Δ

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và $\Delta': 5x + 3y + 8 = 0$

Lời giải:

a) Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có: $d(B, \Delta) = \frac{|5 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{34}}$

b) Do $M(1; 0) \in \Delta$ nên ta có

$$d(\Delta; \Delta') = d(M, \Delta') = \frac{|5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{34}}$$

Ví dụ 2: (ĐH - 2006A): Cho 3 đường thẳng có phương trình

$$\Delta_1: x + y + 3 = 0; \Delta_2: x - y - 4 = 0; \Delta_3: x - 2y = 0$$

Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ_3 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến Δ_2 .

Lời giải:

$$M \in \Delta_3 \Rightarrow M(2t; t)$$

Khoảng cách từ M đến Δ_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến Δ_2 nên ta có

$$\begin{aligned} d(M; \Delta_1) &= 2d(M; \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|2t + t + 3|}{\sqrt{2}} = 2 \frac{|2t - t - 4|}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 3 = 2(t - 4) \\ 3t + 3 = -2(t - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -11 \\ t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(-22; -11), M_2(2; 1)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(2; 0), B(3; 4)$ và $P(1; 1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B

Lời giải:

Đường thẳng Δ đi qua P có dạng $a(x - 1) + b(y - 1) = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

hay $ax + by - a - b = 0$

Δ cách đều A và B khi và chỉ khi

$$d(A; \Delta) = d(B; \Delta) \Leftrightarrow \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 2a + 3b \\ b - a = 2a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b \\ 3a = -2b \end{cases}$$

* Nếu $a = -4b$, chọn $a = 4, b = -1$ suy ra $\Delta: 4x - y - 3 = 0$

+ Nếu $3a = -2b$, chọn $a = 1$, $b = -3$ suy ra $\Delta: 2x - 3y + 1 = 0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là $\Delta_1: 4x - y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 2x - 3y + 1 = 0$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(-2; 0)$. Hãy viết phương trình đường phân giác trong góc A.

Lời giải:

Cách 1: Dễ dàng viết đường thẳng AB, AC có phương trình

$$AB: 3x - 2y - 7 = 0, AC: 2x + 3y + 4 = 0$$

Ta có phương trình đường phân giác góc A là

$$\begin{cases} \Delta_1: \frac{3x-2y-7}{\sqrt{13}} = \frac{2x+3y+4}{\sqrt{13}} \\ \Delta_2: \frac{3x-2y-7}{\sqrt{13}} = -\frac{2x+3y+4}{\sqrt{13}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1: x-5y-11=0 \\ \Delta_2: 5x+y-3=0 \end{cases}$$

Ta thấy $(5-5.4-11)(-2-5.0-11) > 0$ nên 2 điểm B, C nằm về cùng 1 phía đối với đường thẳng Δ_1 . Vậy $\Delta_2: 5x + y - 3 = 0$ là phương trình đường phân giác trong cần tìm.

Cách 2: Gọi $D(x; y)$ là chân đường phân giác hạ từ A của tam giác ABC

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BD} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{DC}$$

$$\text{Mà } AB = 2\sqrt{13}, AC = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=2(-2-x) \\ y-4=2(0-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases} \text{ suy ra } D\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{Ta có phương trình đường phân giác AD: } \frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} = \frac{x-1}{\frac{1}{3}-1} \text{ hay } 5x+y-3=0$$

Cách 3: Gọi $M(x; y)$ thuộc đường thẳng Δ là đường phân giác góc trong góc A

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$$

$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}) \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{AB} = (4; 6)$; $\overrightarrow{AC} = (-3; 2)$; $\overrightarrow{AM} = (x-1; y+2)$ thay vào (*) ta có

$$\begin{aligned} \frac{4(x-1)+6(y+2)}{\sqrt{4^2+6^2}\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}} &= \frac{-3(x-1)+2(y+2)}{\sqrt{(-3)^2+2^2}\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}} \\ \Leftrightarrow 2(x-1)+3(y+2) &= -3(x-1)+2(y+2) \Leftrightarrow 5x+y-3=0 \end{aligned}$$

Vậy đường phân giác trong góc A có phương trình là: $5x + y - 3 = 0$

Ví dụ 5: Cho điểm $C(-2; 5)$ và đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 4 = 0$. Tìm trên Δ hai điểm A, B đối xứng với nhau qua $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$ và diện tích tam giác ABC bằng 15.

Lời giải:

Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua $M(0; 1)$ và nhận $\vec{u}(4; 3)$ làm vector chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

Vì $A \in \Delta$ nên $A(4t; 1+3t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Hai điểm A, B đối xứng với nhau qua $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$

$$\text{suy ra } \begin{cases} 2 = \frac{4t+x_B}{2} \\ \frac{5}{2} = \frac{1+3t+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 4-4t \\ y_B = 4-3t \end{cases}$$

Do đó $B(4-4t; 4-3t)$

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(4-8t)^2 + (3-6t)^2} = 5|2t-1| \text{ và } d(C; \Delta) = \frac{|3(-2)-4.5+4|}{5} = \frac{22}{5}$$

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; \Delta) = \frac{1}{2} \cdot 5|2t-1| \cdot \frac{22}{5} = 11|2t-1|$$

Diện tích tam giác ABC bằng

$$15 \Leftrightarrow 11|2t-1| = 15 \Leftrightarrow 2t-1 = \pm \frac{15}{11} \Leftrightarrow t = \frac{13}{11} \text{ hoặc } t = -\frac{2}{11}$$

$$\text{Với } t = \frac{13}{11} \Rightarrow A\left(\frac{52}{11}; \frac{50}{11}\right), B\left(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11}\right)$$

$$\text{Với } t = -\frac{2}{11} \Rightarrow A\left(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11}\right), B\left(\frac{52}{11}; \frac{50}{11}\right)$$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{52}{11}; \frac{50}{11}\right), B\left(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11}\right) \text{ hoặc } A\left(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11}\right), B\left(\frac{52}{11}; \frac{50}{11}\right).$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP:

Bài 3.34: Cho hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y + 1 = 0$; $d_2: -4x + 6y - 3 = 0$

- Chứng minh rằng $d_1 \parallel d_2$
- Tính diện tích hình vuông có 4 đỉnh nằm trên 2 đường thẳng d_1 và d_2 .
- Viết phương trình đường thẳng Δ song song và cách đều d_1, d_2 .

Hướng dẫn giải

a) Vì $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \neq \frac{1}{-3}$

b) $M(1;1) \in d_1 \Rightarrow S = d^2(M; d_2) = \frac{1}{52}$

c) $M(x; y) \in \Delta \Rightarrow \frac{|2x - 3y + 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|-4x + 6y - 3|}{\sqrt{52}} \Rightarrow \Delta: 2x - 3y + 1 = 0$

Bài 3.35: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm $I(-2; 3)$ và cách đều hai điểm $A(5; -1)$ và $B(3; 7)$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng qua I có dạng $\Delta: a(x+2) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by + 2a - 3b = 0$

Ta có $d(A; \Delta) = d(B; \Delta) \Leftrightarrow \frac{|7a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b \\ a = 0 \end{cases}$

Suy ra $\Delta: 4x + y + 5 = 0$ hoặc $\Delta: y = 3$

Bài 3.36: Cho hai điểm $A(2; 2)$, $B(5; 1)$. Tìm điểm C trên đường thẳng $\Delta: x - 2y + 8 = 0$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 17.

Hướng dẫn giải

$C(2t - 8; t)$, $AB: x + 3y - 8 = 0$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} d(C; AB) \cdot AB \Leftrightarrow 17 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|5t - 16|}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -\frac{18}{5} \end{cases}$

Suy ra $C(12; 10)$ hoặc $C(-\frac{76}{5}; -\frac{18}{5})$

Bài 3.37: a) Cho hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y + 5 = 0$; $d_2: 3x + 2y - 2 = 0$. Tìm M nằm trên Ox cách đều d_1 và d_2 .

b) Cho 3 đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$; $d_2: 6x + 8y - 1 = 0$; $d_3: 4x - 3y + 2 = 0$.

Tìm M nằm trên d_1 cách đều d_2 và d_3 .

Hướng dẫn giải

a) $M \in Ox \Rightarrow M(a; 0)$. $d(M; d_1) = d(M; d_2) \Leftrightarrow \frac{|2a + 5|}{\sqrt{13}} = \frac{|3a - 2|}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ a = -\frac{3}{5} \end{cases}$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là $M_1(7; 0)$ và $M_2(-\frac{3}{5}; 0)$

b) $M \in d_1 \Rightarrow M(1 - 2t; 1 + t)$.

$d(M; d_2) = d(M; d_3) \Leftrightarrow \frac{|13 - 4t|}{10} = \frac{|3 - 11t|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{7}{18} \\ t = \frac{19}{26} \end{cases}$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là $M_1(\frac{16}{9}; \frac{11}{18})$ và $M_2(-\frac{6}{13}; \frac{45}{26})$

Bài 3.38: Cho 2 điểm $A(2; 1)$, $B(-3; 2)$ và đường thẳng $d: 4x + 3y + 5 = 0$. Tìm điểm M cách đều A, B đồng thời khoảng cách từ M đến d bằng 2.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y)$

$MA = MB \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x + 3)^2 + (y - 2)^2 \Leftrightarrow y = 5x + 4 \quad (1)$

$d(M; d) = 2 \Leftrightarrow \frac{|4x + 3y + 5|}{5} = 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $M_1(-\frac{7}{19}; \frac{41}{19})$, $M_2(-\frac{27}{19}; -\frac{59}{19})$

Bài 3.39: Cho điểm $A(3; 1)$. Xác định hai điểm B và C sao cho $OABC$ là hình vuông và B nằm trong góc phần tư thứ nhất. Viết phương trình 2 đường chéo của hình vuông đó.

Hướng dẫn giải

Gọi $B(x; y)$, $\overline{BC} = \overline{AO} \Rightarrow C(x - 3; y - 1)$

Mặt khác ta có $\begin{cases} AB = AO \\ \overline{AB} \cdot \overline{AO} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10 \\ -3(x - 3) - 1(y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ (loại)

Do đó $B(2; 4)$, $C(-1; 3) \Rightarrow AC: x + 2y - 5 = 0$, $BO: 2x - y = 0$

Bài 3.40: Cho tam giác ABC có diện tích bằng 4, hai đỉnh $A(1; -2)$, $B(2; -3)$ và trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên đường thẳng d: $x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm C.

Hướng dẫn giải

$$G(2t+1; t) \Rightarrow C(6t; 3t+5). S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(C; AB) \cdot AB \Leftrightarrow 8 = |9t+6| \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{9} \\ t = -\frac{14}{9} \end{cases}$$

Suy ra có hai điểm thỏa mãn $C_1\left(\frac{4}{3}; \frac{17}{3}\right)$, $C_2\left(-\frac{28}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Bài 3.41: Cho tam giác ABC có $A(0; 1)$ và phương trình các đường cao BB' : $2x - y - 1 = 0$, CC' : $x + 3y - 1 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có $AB: 3x - y + 1 = 0$, $AC: x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow B(-2; -5)$, $C(4; -1)$

$$\text{Suy ra } BC: 2x - 3y - 11 = 0 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{50} = \frac{35\sqrt{26}}{13}$$

Bài 3.42: Cho các điểm $A(1; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(-1; 4)$, $D(3; 5)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho diện tích hai tam giác MAB và MCD bằng nhau.

Hướng dẫn giải

$S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow AB \cdot d(M; AB) = CD \cdot d(M; CD)$ từ đó ta tìm được tập hợp các điểm M là hai đường thẳng có phương trình $3x + 7y - 21 = 0$ và $5x - y + 13 = 0$

Bài 3.43: Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết $A(1; 0)$, $B(0; 2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $y = x$. Tìm tọa độ đỉnh C và D.

Hướng dẫn giải

Ta có: $AB: 2x + y - 2 = 0$.

$I \in d: y = x \Rightarrow I(t; t)$, $C(2t-1; 2t)$, $D(2t; 2t-2)$.

$$S_{ABCD} = AB \cdot CH = 4 \Rightarrow CH = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow d(C; AB) = CH \Leftrightarrow \frac{|6t-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Từ đó tọa độ của C và D là $C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$, $D\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1; 0)$, $D(0; -2)$

Bài 3.44: Cho các điểm $A(2; 3)$, $B(5; 2)$, $C(8; 6)$ và một đường thẳng d: $x - y + 5 = 0$. Tìm trên d một điểm D sao cho hình vuông MNPQ có các cạnh lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử vectơ pháp tuyến của đường thẳng MN là $\vec{u}(a; b)$.

Khi đó $MN: a(x-2) + b(y-3) = 0$, $NP: b(x-5) - a(y-2) = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} d(C; MN) &= d(D; NP); S(MNPQ) = (d(C; MN))^2 \\ &= \frac{(6a+3b)^2}{a^2+b^2} \leq \frac{(6^2+3^2)(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = 40 \end{aligned}$$

Dấu bằng khi $a=2b$. Chọn $a=1, b=1$ và gọi $D(t; t+5)$ thay vào $d(C; MN) = d(D; NP)$ ta được $t=4; t=-26$

Vậy $D(4; 9)$ hoặc $D(-26; -21)$

Bài 3.45: Cho ba điểm $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(4; 5)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ các điểm B và C đến đường thẳng Δ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Kẻ $BH \perp \Delta$ tại H, $CH \perp \Delta$ tại K. Gọi M là trung điểm của BC suy ra $M(4; 2)$, $AM = \sqrt{5}$, $BC = 6$.

+ TH1: Nếu Δ không cắt BC khi đó gọi I là hình chiếu M lên Δ thì

$$BH + CK = 2MI \leq AM = \sqrt{5}$$

+ TH2: Nếu Δ cắt BC khi đó $BH + CK \leq BC = 6$

Từ hai trường hợp trên suy ra $BH + CK \leq 6$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta \perp BC$

Ta có $\overline{BC}(0; 6) \Rightarrow \Delta: 0(x-2) + 6(y-3) = 0$ hay $y = 3$

Bài 3.46: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, cho tam giác ABC vuông tại C. Biết $A(3; 0)$, đỉnh C thuộc trục tung và có tung độ nhỏ hơn 1, điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - 12 = 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC, biết tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Hướng dẫn giải

Do $C \in Oy \Rightarrow C(0; c)$; $B \in \Delta \Rightarrow B(3b; 4-4b)$

Tam giác ABC vuông tại C

$$\Rightarrow \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0 \Rightarrow 9b - c(4-4b-c) = 0 \Rightarrow b-1 = -\frac{c^2+9}{9+4c} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} d(C, \Delta) \cdot AB = \frac{|3c-12|}{10} \sqrt{25(b-1)^2} = \frac{3}{2} |c-4| |b-1|, \text{ do đó:}$$

$$S_{ABC} = 6 \Rightarrow |(c-4)(b-1)| = 4 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có :

$$(c^2 + 9) \left| \frac{c-4}{9+4c} \right| = 4 \Rightarrow \begin{cases} c^3 - 4c^2 - 7c - 72 = 0 \\ c^3 - 4c^2 + 25c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \text{ (Do } c < 1).$$

$$\text{Vậy } C \equiv O(0;0), B(0;4) \text{ hay } G\left(1; \frac{4}{3}\right).$$

DẠNG TOÁN 2: BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ có phương trình

$$(\Delta_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0, (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$$

$$(\Delta_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0, (a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

$$\text{được xác định theo công thức: } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta chỉ cần biết véc tơ chỉ phương (hoặc vectơ pháp tuyến) của chúng $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)| = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Xác định góc giữa hai đường thẳng trong các trường hợp sau:

$$\Delta_1: 3x - 2y + 1 = 0; \quad \Delta_2: \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

$\vec{n}_1(3; -2), \vec{n}_2(5; 1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_1 và Δ_2

$$\text{suy ra } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|3 \cdot 5 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ góc giữa hai đường thẳng } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ là } 45^\circ$$

Ví dụ 2: Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng

$$\Delta_1: \sqrt{3}x - y + 7 = 0 \text{ và } \Delta_2: mx + y + 1 = 0 \text{ một góc bằng } 30^\circ$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|m\sqrt{3} - 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{m^2 + 1^2}}$$

Theo bài ra góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng 30° nên

$$\cos 30^\circ = \frac{|m\sqrt{3} - 1|}{2 \cdot \sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|m\sqrt{3} - 1|}{2 \cdot \sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2 + 1)} = |m\sqrt{3} - 1|$$

$$\text{Hay } 3(m^2 + 1) = (m\sqrt{3} - 1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 + 3 = 3m^2 - 2m\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho đường thẳng $d: 3x - 2y + 1 = 0$ và $M(1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với d một góc 45° .

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua M có dạng $\Delta: a(x-1) + b(y-2) = 0, a^2 + b^2 \neq 0$ hay $ax + by - a - 2b = 0$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 45° nên:

$$\cos 45^\circ = \frac{|3a + (-2b)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|3a - 2b|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{26(a^2 + b^2)} = 2|3a - 2b| \Leftrightarrow 5a^2 - 24ab - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b \\ 5a = -b \end{cases}$$

+ Nếu $a = 5b$, chọn $a = 5, b = 1$ suy ra $\Delta: 5x + y - 7 = 0$

+ Nếu $5a = -b$, chọn $a = 1, b = -5$ suy ra $\Delta: x - 5y + 9 = 0$

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn $\Delta_1: x - 5y + 9 = 0$ và $\Delta_2: 5x + y - 7 = 0$

Ví dụ 4: Cho 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x - y + 1 = 0, \Delta_2: x + 2y - 7 = 0$

Viết phương trình đường thẳng Δ qua gốc tọa độ sao cho Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 tam giác cân có đỉnh là giao điểm Δ_1 và Δ_2 .

Lời giải:

Đường thẳng Δ qua gốc tọa độ có dạng $ax + by = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Theo giả thiết ta có $\cos(\Delta; \Delta_1) = \cos(\Delta; \Delta_2)$ hay

$$\frac{|2a-b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a+2b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=a+1b \\ b-2a=a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ 3a=-b \end{cases}$$

+ Nếu $a=3b$, chọn $a=3$, $b=1$ suy ra $\Delta: 3x+y=0$

+ Nếu $3a=-b$, chọn $a=1$, $b=-3$ suy ra $\Delta: x-3y=0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_1: 3x+y=0$ và $\Delta_2: x-3y=0$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.47: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

a) $d_1: \begin{cases} x=1-3t \\ y=2+t \end{cases}; d_2: 3x+2y-2=0$

b) $d_1: x+my-1=0; d_2: x-y+2m-1=0$

Hướng dẫn giải

a) $\cos(d_1; d_2) = \frac{9}{\sqrt{130}}$, b) $\cos(d_1; d_2) = \frac{|1-m|}{\sqrt{2+2m^2}}$

Bài 3.48: Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và tạo với Δ một góc α biết:

a) $M(-2; -1); \Delta: 3x+2y-1=0; \alpha=30^\circ$ b) $M(4; 1); \Delta \equiv Oy; \alpha=60^\circ$

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng d đi qua M có dạng $d: ax+by+2a+b=0, a^2+b^2 \neq 0$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 30° nên:

$$\cos 30^\circ = \frac{|3a+2b|}{\sqrt{3^2+2^2}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|3a+2b|}{\sqrt{13}\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{24 \pm 13\sqrt{3}}{23}a \Rightarrow d_1: 23x + (24 + 13\sqrt{3})y + 70 + 13\sqrt{3} = 0$$

và $d_2: 23x + (24 - 13\sqrt{3})y + 70 - 13\sqrt{3} = 0$

b) Đường thẳng d đi qua M có dạng $d: ax+by-4a-b=0, a^2+b^2 \neq 0$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 60° nên:

$$\cos 60^\circ = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}a$$

Suy ra $d_1: x + \sqrt{3}y - 4 - \sqrt{3} = 0$ và $d_2: x - \sqrt{3}y - 4 + \sqrt{3} = 0$

Bài 3.49: Cho hình vuông có đỉnh $A(-4; 5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình $7x-y+8=0$. Lập phương trình các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông.

Hướng dẫn giải

Có $A \notin \Delta: 7x-y+8=0 \Rightarrow B, D \in \Delta, BD: x+7y-31=0$.

$I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$ làm tâm hình vuông suy ra $C(3; 4)$.

Đường thẳng qua A có dạng $ax+by+4a-5b=0, a^2+b^2 \neq 0$

Ta có $\cos(AB, AD) = \cos 45^\circ = \frac{|a+7b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}}$

$AB: 4x+3y+1=0, AD: 3x-4y+32=0, CD: 4x+3y-24=0,$

$BC: 3x-4y+7=0$ hoặc $AB: 3x-4y+32=0$

$AD: 4x+3y+1=0, CD: 3x-4y+7=0, BC: 4x+3y-24=0$

Bài 3.50: Cho ΔABC cân đỉnh A . Biết phương trình các đường thẳng AB, BC là $AB: x+y+1=0; BC: 2x-3y-5=0$.

Viết phương trình đường thẳng AC biết nó đi qua $M(1; 1)$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng AC qua $M(1; 1)$ có dạng $a(x-1)+b(y-1)=0$

Theo bài ra, tam giác ABC cân đỉnh A nên ta có $(AB; BC) = (AC; CA)$ từ đó ta tìm được phương trình đường thẳng AC là $AC: 17x+7y-24=0$

Bài 3.51: Cho tam giác ABC có cả ba góc đều nhọn. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC của tam giác, biết tọa độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C tương ứng là $A'(-1; -2), B'(2; 2), C'(-1; 2)$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trực tâm tam giác khi đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$

Ta có $A'B': 4x-3y-2=0, B'C': y-2=0$

Khi đó ta viết được phương trình đường phân giác trong ngoài $\widehat{A'B'C'}$ là $2x+y-6=0$ cũng chính là phương trình đường thẳng AC

Bài 3.52: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho các điểm $A(1; 2), B(4; 3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\widehat{MAB} = 135^\circ$ và khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Giả sử $M(x; y)$. Kẻ $MH \perp AB$. Từ giả thiết suy ra $MH = \frac{\sqrt{10}}{2}$ và ΔMAH vuông cân.

Suy ra $AM = MH\sqrt{2} = \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{AB}, \overline{AM}) = 135^\circ \\ AM = \sqrt{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3(x-1) + 1(y-2)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $u = x - 1, v = y - 2$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} 3u + v = -5 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1, v = -2 \\ u = -2, v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 0) \\ M(-1; 3) \end{cases}$$

Bài 3.53: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Biết $A(0; 2)$, $D(-2; -2)$ và I nằm trên đường thẳng $x + y - 4 = 0$ sao cho $\widehat{AID} = 45^\circ$ (với $I = AC \cap BD$). Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang.

Hướng dẫn giải

I thuộc đường thẳng $x + y - 4 = 0$ nên $I(x_0; 4 - x_0)$

$$AD = 2\sqrt{5}, IA = \sqrt{2x_0^2 - 4x_0 + 4}, ID = \sqrt{2x_0^2 - 8x_0 + 40}$$

$$\frac{IA^2 + ID^2 - AD^2}{2IA \cdot ID} = \cos \widehat{AID}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 3x_0 + 6}{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 20} \cdot \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3x_0 + 6 > 0 \\ x_0^4 - 6x_0^3 + 12x_0^2 - 24x_0 + 32 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)(x_0 - 4)(x_0^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 4 \end{cases}$$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow I(2; 2)$ khi đó $IA = 2, ID = 4\sqrt{2} \Rightarrow \overline{ID} = -\frac{ID}{IB} \cdot \overline{IB} = -2\sqrt{2}\overline{IB}$

Từ đây suy ra $B(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}), C(2 + 4\sqrt{2}, 2 + 4\sqrt{2})$

Với $x_0 = 4$: Tương tự ta tìm được $B(4 + 3\sqrt{2}; \sqrt{2}), C(4 + 4\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$

§4. ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Phương trình đường tròn.

• Phương trình đường tròn (C) tâm $I(a; b)$, bán kính R là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Dạng khai triển của (C) là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $c = a^2 + b^2 - R^2$

• Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$, là phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

2. Phương trình tiếp tuyến:

Cho đường tròn (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

• Tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với IM nên phương trình: $\Delta: (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$

• $\Delta: ax + by + c = 0$ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

• Đường tròn (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ có hai tiếp tuyến cùng phương với Oy là $x = a \pm R$. Ngoài hai tiếp tuyến này các tiếp tuyến còn lại đều có dạng: $y = kx + m$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: NHẬN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Cách 1:

+ Đưa phương trình về dạng: (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1)

+ Xét dấu biểu thức $P = a^2 + b^2 - c$

Nếu $P > 0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Nếu $P \leq 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

Cách 2: Đưa phương trình về dạng: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = P$ (2).

Nếu $P > 0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{P}$

$R = \sqrt{P}$

Nếu $P \leq 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$ (1) b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$ (2)

c) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$ (3) d) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$ (4)

Lời giải:

a) Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = -1$; $b = 2$; $c = 9$

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 9 < 0$

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có: $a^2 + b^2 - c = 9 + 4 - 13 = 0$

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có: $(3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2}$

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ bán kính

$R = \frac{\sqrt{10}}{2}$

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m - 2)y + 6 - m = 0$ (1)

a) Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn hãy tìm tọa độ tâm và bán kính theo m

Lời giải:

a) Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$

Với $a = m$; $b = 2(m - 2)$; $c = 6 - m$

Hay $m^2 + 4(m - 2)^2 - 6 + m > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I(m; 2(m - 2))$ và bán kính:

$R = \sqrt{5m^2 - 15m + 10}$

Ví dụ 3: Cho phương trình đường cong (C_m) :

$x^2 + y^2 + (m + 2)x - (m + 4)y + m + 1 = 0$ (2)

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải:

a) Ta có $a^2 + b^2 - c = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{m+4}{2}\right)^2 - m - 1 = \frac{(m+2)^2 + 4}{2} > 0$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m

b) Đường tròn có tâm I : $\begin{cases} x_I = -\frac{m+2}{2} \\ y_I = \frac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_I + y_I - 1 = 0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$

c) Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_0^2 + y_0^2 + (m + 2)x_0 - (m + 4)y_0 + m + 1 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 - 1)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Vậy có hai điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1; 0)$ và $M_2(1; 2)$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.54: Cho phương trình: $x^2 + y^2 + 6mx - 2(m - 1)y + 11m^2 + 2m - 4 = 0$.

a) Tìm điều kiện của m để pt trên là pt đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm đường tròn.

Hướng dẫn giải

Ta có $a^2 + b^2 - c = -m^2 - 4m + 5$

Phương trình (C_m) là pt đường tròn

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow -m^2 - 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow -5 < m < 1$

b) Ta có tọa độ của I là $\begin{cases} x_I = -3m \\ y_I = m - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{3}x_I \\ y_I = -\frac{1}{3}x_I - 1 \end{cases}$

Vì $-5 < m < 1$ nên $-3 < x_I < 15$

Vậy tập hợp tâm đường tròn là đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x - 1$ với $x \in (-3; 15)$

Bài 3.55: Cho phương trình $(C_m): x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2(m-3)y + 2 = 0$.

- Tìm m để (C_m) là phương trình của một đường tròn.
- Tìm m để (C_m) là đường tròn tâm $I(1; -3)$. Viết phương trình đường tròn này.
- Tìm m để (C_m) là đường tròn có bán kính $R = 5\sqrt{2}$. Viết phương trình đường tròn đó

Hướng dẫn giải

- $a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow 2(m^2 - 4m + 4) > 0 \Leftrightarrow m \neq 2$
- Để (C_m) là đường tròn tâm $I(1; -3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ -(m-1) = 1 \Leftrightarrow m = 0 \\ m-3 = -3 \end{cases}$

Khi đó phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$

- Có 2 phương trình thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 + 12x - 8y + 2 = 0 \text{ hoặc } x^2 + y^2 - 8x + 12y + 2 = 0$$

Bài 3.56: Cho $A(-1; 0)$, $B(2; 4)$ và $C(4; 1)$. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $3MA^2 + MB^2 = 2MC^2$ là một đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của (C) .

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x; y)$ khi đó $3MA^2 + MB^2 = 2MC^2$

$$\Leftrightarrow 3[(x+1)^2 + y^2] + (x-2)^2 + (y-4)^2 = 2[(x-4)^2 + (y-1)^2]$$

$$\text{Hay } 2x^2 + 2y^2 + 18x - 4y - 11 = 0 (*)$$

Phương trình $(*)$ là phương trình đường tròn có tâm $I\left(-\frac{9}{2}; 1\right)$, bán kính

$$R = \frac{107}{4}$$

DẠNG TOÁN 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Cách 1: + Tìm tọa độ tâm $I(a; b)$ của đường tròn (C)

- + Tìm bán kính R của đường tròn (C)
- + Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) là:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ (Hoặc } x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0).$$

- + Từ điều kiện của đề bài thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c .
- + Giải hệ để tìm a, b, c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C) .

Chú ý:

- * $A \in (C) \Leftrightarrow IA = R$
- * (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A \Leftrightarrow IA = d(I; \Delta) = R$
- * (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I; \Delta_1) = d(I; \Delta_2) = R$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

- Có tâm $I(1; -5)$ và đi qua $O(0; 0)$.
- Nhận AB làm đường kính với $A(1; 1)$, $B(7; 5)$.
- Đi qua ba điểm: $M(-2; 4)$, $N(5; 5)$, $P(6; -2)$

Lời giải:

- Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ nên có phương trình là $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 26$
- Gọi I là trung điểm của đoạn AB suy ra $I(4; 3)$

$$AI = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I(4; 3)$ làm tâm và bán kính $R = AI = \sqrt{13}$ nên có phương trình là $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$

- Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
Do đường tròn đi qua ba điểm M, N, P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 + 16 + 4a - 8b + c = 0 \\ 25 + 25 - 10a - 10b + c = 0 \\ 36 + 4 - 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

Nhận xét: Đối với ý c) ta có thể làm theo cách sau

Gọi $I(x; y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm

$$\text{Vì } IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases} \text{ nên ta có hệ}$$

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2 \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

- a) (C) có tâm I(-1;2) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$
 b) (C) đi qua A(2;-1) và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy
 c) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$

Lời giải:

- a) Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên

$$R = d(I; \Delta) = \frac{|-1-4+7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5}$

- b) Vì điểm A nằm ở góc phần tư thứ tư và đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có dạng I(R; -R) trong đó R là bán kính đường tròn (C).

$$\text{Ta có: } R^2 = IA^2 \Leftrightarrow R^2 = (2-R)^2 + (-1+R)^2 \Leftrightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R=1 \\ R=5 \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn đầu bài là: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ và $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

- c) Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi K(6a+10;a)

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5} \Leftrightarrow |22a+35| = |21a+35| \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-\frac{70}{43} \end{cases}$$

- Với $a=0$ thì K(10;0) và $R=7$ suy ra (C): $(x-10)^2 + y^2 = 49$

$$\text{Với } a = -\frac{70}{43} \text{ thì } K\left(\frac{10}{43}; -\frac{70}{43}\right) \text{ và } R = \frac{7}{43}$$

$$\text{suy ra (C): } \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$$(C): (x-10)^2 + y^2 = 49 \text{ và } (C): \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$$

Ví dụ 3: Cho hai điểm A(8;0) và B(0;6).

- a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB
 b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Lời giải:

- a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra I(4;3)

$$\text{Bán kính } R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

- b) Ta có $OA=8; OB=6; AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$

Mặt khác $\frac{1}{2}OA \cdot OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC)

$$\text{Suy ra } r = \frac{OA \cdot OB}{OA + OB + AB} = 2$$

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là (2;2)

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x+y=0$.

và $d_2: \sqrt{3}x-y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải (hình 3.1)

$$\text{Vì } A \in d_1 \Rightarrow A(a; -\sqrt{3}a), a > 0; B, C \in d_2 \Rightarrow B(b; \sqrt{3}b), C(c; \sqrt{3}c)$$

$$\text{Suy ra } \overline{AB}(b-a; \sqrt{3}(a+b)), \overline{AC}(c-a; \sqrt{3}(c+a))$$

Tam giác ABC vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn C.

Do đó $AC \perp d_1$

$$\Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{u_1} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot (c-a) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}(a+c) = 0 \Leftrightarrow 2a+c=0 \quad (1)$$

$$AB \perp d_2 \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{u_2} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (b-a) + 3(a+b) = 0 \Leftrightarrow 2b+a=0 \quad (2) \quad \text{Hình 3.1}$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}d(A; d_2) \cdot BC \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|2\sqrt{3}a|}{2} \sqrt{(c-b)^2 + 3(c-b)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a|c-b|=1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } 2(c-b) = -3a \text{ thế vào (3) ta được } a|-3a|=1 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó } b = -\frac{\sqrt{3}}{6}, c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -1\right), C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -2\right)$$

$$\text{Suy ra (C) nhận } I\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{3}{2}\right) \text{ là trung điểm AC làm tâm và bán kính là}$$

$$R = \frac{AC}{2} = 1$$

$$\text{Vậy phương trình đường tròn cần tìm là (C): } \left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.58. Viết phương trình đường tròn (C) biết

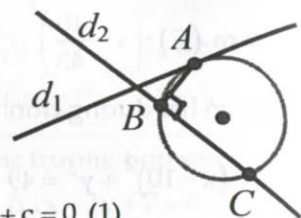
- (C) có đường kính AB với $A(1; -1)$ và $B(3; 3)$.
- (C) ngoại tiếp $\triangle ABC$ với $A(4; 4), B(1; -5)$ và $C(-3; 3)$.
- (C) có tâm $I(1; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

- (C) có tâm $I(2; 1)$ là trung điểm của AB và bán kính là $IA = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow (C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

- Gọi $I(x; y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm



$$\text{Vì } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \text{ nên ta có hệ}$$

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = (x-1)^2 + (y+5)^2 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 = (x+3)^2 + (y-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0)$$

$$\text{Vậy (C): } (x-1)^2 + y^2 = 25$$

$$c) R = d(I; \Delta) = \frac{|3-4.2+7|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Vậy phương trình đường tròn (C) là: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{25}$$

Bài 3.59: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC, hai cạnh AB, AC theo thứ tự có phương trình $x+y-2=0$ và $2x+6y-3=0$. Cạnh BC có trung điểm $M(-1; 1)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Để dàng tìm được $A\left(\frac{15}{4}; -\frac{7}{4}\right)$, gọi P là trung điểm của AC.

$$\text{Khi đó } MP: x+y=0$$

$$\text{Suy ra } P\left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right) \Rightarrow C\left(-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right), B\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right) \text{ do đó đường tròn cần tìm là}$$

$$x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{65}{8} = 0$$

Bài 3.60: Viết phương trình đường tròn (C) trong trường hợp sau:

- Đi qua $A(-4; 2)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ.
- Có tâm nằm trên đường thẳng $x=5$ và tiếp xúc với hai đường thẳng: $d_1: 3x-y+3=0, d_2: x-3y+9=0$.

Hướng dẫn giải

$$a) (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ hoặc } (x+10)^2 + (y-10)^2 = 100$$

$$b) (x-5)^2 + (y+2)^2 = 40, (x-5)^2 + (y-8)^2 = 10$$

Bài 3.61: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):

$(x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0, \Delta_2: x-7y=0$. Xác định tọa độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1) ; biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc (C).

Hướng dẫn giải

Giải sử (C_1) có tâm $K(a; b)$ bán kính R khi đó $(C_1): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$$\text{Ta có } K \in (C) \Rightarrow (a-2)^2 + b^2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{và } d(K; d_1) = d(K; d_2) = R \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a-7b|}{\sqrt{50}} = R$$

$$\text{Suy ra } K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right), R = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow (C_1): \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}$$

Bài 3.62: Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC tạo bởi ba đường thẳng $4x - 3y - 65 = 0$; $7x - 24y + 55 = 0$; $3x + 4y - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi ABC là tam giác đã cho với các cạnh là:

$$AB: 4x - 3y - 65 = 0, BC: 7x - 24y + 55 = 0, CA: 3x + 4y - 5 = 0$$

Suy ra $A(11; -7)$, $B(23; 9)$, $C(-1; 2)$ và dễ thấy tam giác ABC vuông ở A.

$$\text{Ta có } AB = 20, BC = 25, CA = 15 \Rightarrow S = 150 \Rightarrow r = 5$$

Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $I(x; y)$ suy ra khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng đã cho đều bằng $r = 5$ nên ta có:

$$5 = \frac{|4x - 3y - 65|}{5} = \frac{|7x - 24y + 55|}{25} = \frac{|3x + 4y - 5|}{5}$$

Giải hệ này ta tìm được $I(10; 0)$. Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$(x-10)^2 + y^2 = 25$$

Bài 3.63: Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A(-1; 7)$, $B(4; -3)$ và $C(-4; 1)$.

Hãy viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Hướng dẫn giải

Gọi $I(a; b)$, R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp (C)

M là chân đường phân giác trong góc A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MB} = -\frac{MB}{MC} \overrightarrow{MC} = -\frac{5}{3} \overrightarrow{MC} \Rightarrow M\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM} \Rightarrow I(-1; 2), R = d(I; AB) = \sqrt{5}$$

$$\text{Đường tròn cần tìm là } (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Chú ý: Để tìm tọa độ tâm I có thể viết phương trình hai đường phân giác trong của góc A, B khi đó nghiệm của hệ tạo bởi hai đường phân giác là tọa độ I.

Bài 3.64: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(2; 1)$ và đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn đi qua M cắt Δ ở 2 điểm A, B phân biệt sao cho ΔMAB vuông tại M và có diện tích bằng $2. (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) tâm $I(a, b)$ bán kính R có phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. ΔMAB vuông tại M nên AB là đường kính suy ra Δ qua I do đó: $a - b + 1 = 0$ (1)

$$\text{Hạ } MH \perp AB \text{ có } MH = d_{(M, \Delta)} = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} MH \cdot AB \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}$$

$$\text{Vì đường tròn qua M nên } (2-a)^2 + (1-b)^2 = 2 \quad (2)$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a - b + 1 = 0 & (1) \\ (2-a)^2 + (1-b)^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ được $a = 1, b = 2$. Vậy (C) có phương trình

DẠNG TOÁN 3: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM; ĐƯỜNG THẲNG; ĐƯỜNG TRÒN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

• Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (C)

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính IM

+ Nếu $IM < R$ suy ra M nằm trong đường tròn

+ Nếu $IM = R$ suy ra M thuộc đường tròn

+ Nếu $IM > R$ suy ra M nằm ngoài đường tròn

• Vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và đường tròn (C)

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d(I; \Delta)$

+ Nếu $d(I; \Delta) < R$ suy ra Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

+ Nếu $d(I; \Delta) = R$ suy ra Δ tiếp xúc với đường tròn

+ Nếu $d(I; \Delta) > R$ suy ra Δ không cắt đường tròn

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng Δ và đường tròn (C) bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

- Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C')
- Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính $II', R+R', |R-R'|$
- Nếu $II' > R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau
 - Nếu $II' = R+R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau
 - Nếu $II' < |R-R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau
 - Nếu $II' = |R-R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau
 - Nếu $|R-R'| < II' < R+R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt
- Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng (C) và đường tròn (C') bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+2y-4=0$

- Chứng minh điểm M(2;1) nằm trong đường tròn
- Xét vị trí tương đối giữa Δ và (C)
- Viết phương trình đường thẳng Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất.

Lời giải:

- Đường tròn (C) có tâm I(2;-1) và bán kính $R=3$.

Ta có $IM = \sqrt{(2-2)^2 + (1+1)^2} = 2 < 3 = R$ do đó M nằm trong đường tròn.

- Vì $d(I;\Delta) = \frac{|2+1+1|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} < 3 = R$ nên Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

- Vì Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất nên Δ' vuông góc với Δ và đi qua tâm I của đường tròn (C).

Do đó Δ' nhận vector $\vec{u}_\Delta = (1;1)$ làm vector pháp tuyến suy ra $\Delta': 1(x-2) + 1(y+1) = 0$ hay $x+y-1=0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta': x+y-1=0$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \text{ và } (C'): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$$

- Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B
- Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B
- Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B và O

Lời giải

- Cách 1: (C) có tâm I(1;3) và bán kính $R=5$, (C') có tâm I'(3;1) và bán kính $R'=\sqrt{13}$

$$II' = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

Ta thấy $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < |R_1 + R_2|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2 + y^2 - 2(y+3) - 6y - 15 = 0 \\ x = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = 0 \\ x = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 3 \\ x = y+3 \end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là A(1;-2) và B(6;3)

- Đường thẳng đi qua hai điểm A, B nhận $\vec{AB}(5;5)$ làm vector chỉ phương suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x = 1+5t \\ y = -2+5t \end{cases}$

- Cách 1: Đường tròn cần tìm (C'') có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (C'') đi qua ba điểm A, B và O nên ta có hệ

$$\begin{cases} 1+4-2a+4b+c=0 \\ 36+9-12a-6b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

Vậy (C'') : $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$

Cách 2: Vì A, B là giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') nên tọa độ đều thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 + m(x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3) = 0 (*)$$

Tọa độ điểm O thỏa mãn phương trình (*) khi và chỉ khi $-15 + m(-3) = 0 \Leftrightarrow m = -5$

Khi đó phương trình (*) trở thành $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$

Ví dụ 3: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$

- a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B
b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

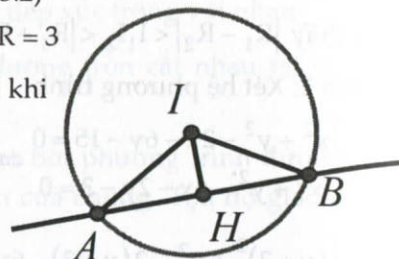
Lời giải (hình 3.2)

a) Đường tròn (C) có tâm I(1; -2), bán kính R = 3

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < 3$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 5m + 17 > 0 \text{ (đúng với mọi m)}$$



Hình 3.2

b) Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{9}{2} \sin \widehat{AIB} \leq \frac{9}{2}$

Suy $\max S_{IAB} = \frac{9}{2}$ khi và chỉ khi $\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ khi đó $\widehat{AIH} = 45^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \cos 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Ta có $d(I; \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{2 + m^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Vậy với $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.65: Cho $d: x - 5y - 2 = 0$ và (C) có tâm I(-1; 2), bán kính $R = \sqrt{13}$

a) Viết phương trình đường tròn (C).

b) Tìm tọa độ giao điểm của (C) và d

Hướng dẫn giải

Phương trình đường tròn là: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$

Tọa độ giao điểm hai đường tròn là (2; 0), (-3; -1).

Bài 3.66: Biện luận số giao điểm của (C) và d trong đó:

$d: mx - y - 3m - 2 = 0, (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

Hướng dẫn giải

(C) có tâm I(2; 1) và $R = \sqrt{5}$. $h = d(I; d) = \frac{|m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

$h < \sqrt{5} \Leftrightarrow m > 2$ hoặc $m < -\frac{1}{2} \Rightarrow d$ và (C) có 2 giao điểm.

$h = \sqrt{5} \Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow d$ tiếp xúc với (C)

$h > \sqrt{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 2$ d không cắt (C)

Bài 3.67: Trong mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua d. Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C').

Hướng dẫn giải

(C) có tâm I(1; 2) và $R = 2$.

Khi đó (C) là đường tròn có tâm I' là và cũng có bán kính bằng 2.

I'(3; 0) là điểm đối xứng của I qua d suy ra phương trình (C') là:

$(C'): (x - 3)^2 + y^2 = 4$

Tọa độ giao điểm hai đường tròn là (1; 0), (3; 2).

Bài 3.68: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C₁) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Hướng dẫn giải

$(C_1): (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4,$

$(C_2): (x - 18)^2 + (y - 18)^2 = 18, (C_3): (x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 36$

Bài 3.69: Cho hai đường tròn:

$(C): x^2 + y^2 = 1$ và $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0$

Xác định m để (C_m) tiếp xúc với (C).

Hướng dẫn giải

Để thấy (C) có tâm O(0; 0) và bán kính $R = 1$.

(C_m) có tâm I(m + 1; -2m) và bán kính $R' = \sqrt{(m + 1)^2 + 4m^2 + 5}$

Ta thấy $OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} < R$ điểm O nằm trong đường tròn tâm I suy ra (C) và (C_m) chỉ có thể tiếp xúc trong nhau.

Điều kiện để hai đường tròn tiếp xúc trong là

$$R' - R = OI \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} + 5 - 1 = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}$$

Ta được $m = -1$ hoặc $m = \frac{3}{5}$

Bài 3.70. Trong mặt phẳng Oxy, Viết phương trình đường thẳng qua điểm O và cắt đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ tại hai điểm A, B sao cho O là trung điểm của AB.

Hướng dẫn giải

C1: (C) có $I(1; -3)$ là tâm, bán kính $R = 5$.

Đường thẳng Δ đi qua O và cắt (C) tại A, B với O là trung điểm AB, suy ra $\Delta \perp OI$ (chú ý rằng O nằm trong (C)).

Từ đó ta viết được phương trình của Δ : $x - 3y = 0$.

C2: Gọi $A(x; y)$ vì O là trung điểm AB nên có $B(-x; -y)$

Vì A, B đều thuộc (C) nên ta có
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 3y = 0$$

Vậy Δ : $x - 3y = 0$

Bài 3.71. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và điểm $A(3; 0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt đường tròn (C) theo một dây cung MN sao cho

- a) MN có độ dài lớn nhất b) MN có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

(C): $I(-1; 2)$, $R = 5$

a) MN có độ dài lớn nhất khi và chỉ khi MN là đường kính hay MN đi qua A, I do đó có phương trình là Δ : $x + 2y - 3 = 0$

b) Kẻ $IH \perp MN$. MN nhỏ nhất khi IH lớn nhất hay $H \equiv A \Rightarrow IA \perp \Delta$ từ đó Δ : $2x - y - 6 = 0$

Bài 3.72. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ có tâm I và điểm $M(-1; -3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

(C): $I(1; -2)$, $R = 3$, Gọi Δ : $a(x+1) + b(y+3) = 0$, ($a^2 + b^2 \neq 0$)

$S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \sin(\widehat{AIB}) \leq \frac{1}{2} R^2 \Rightarrow S_{IAB}$ lớn nhất khi $\widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow IH = \frac{3}{\sqrt{2}}$

với H là hình chiếu I lên Δ

Suy ra $d(I; \Delta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ từ đó ta tìm được hai đường thẳng thỏa mãn là

$$\Delta_1: x + y + 4 = 0, \Delta_2: 7x + y + 10 = 0$$

Bài 3.73. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 + 4x = 0$. Một đường thẳng Δ đi qua giao điểm của (C) và (C') lần lượt cắt lại (C) và (C') tại M và N. Viết phương trình đường thẳng Δ khi MN đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

(C) có tâm $I(2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$, (C') có tâm $J(-2; 0)$ và bán kính $R' = 2 \Rightarrow |R - r| < IJ < R + r \Rightarrow$ (C) cắt (C') tại hai điểm A, B

Xét Δ bất kì qua A cắt (C) và (C') tại M và N, gọi Δ' là đường thẳng qua A vuông góc với AB, cắt (C), (C') lần lượt tại C và D.

K, H lần lượt là hình chiếu của I, J lên Δ' .

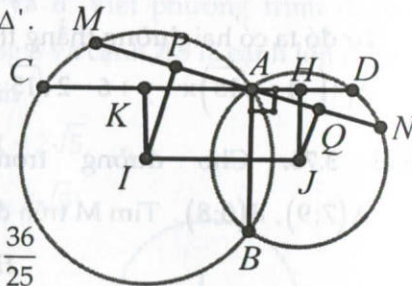
P, Q lần lượt là hình chiếu của I, J lên Δ .

Khi đó ta có $MN = 2PQ \leq 2IJ = 2KH = CD$

$\Rightarrow \max MN = CD$.

Tọa độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{36}{25} \\ y = \frac{48}{25} \end{cases}$$



Hình 3.28

Từ đó suy ra có hai đường thẳng thỏa mãn là

$$\Delta_1: 3x - 4y = 0 \text{ và } \Delta_2: 3x - 4y + 12 = 0$$

Bài 3.74: Cho (C): $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ và $M(7; 3)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (C) tại A, B sao cho $MA = 3MB$.

Hướng dẫn giải

Để thấy M nằm ngoài đường tròn gọi h là khoảng cách từ I đến đường thẳng cần tìm

$$\text{Ta có: } \begin{cases} h^2 + MB^2 = R^2 = 25 \\ h^2 + 4MB^2 = IM^2 = 52 \end{cases} \Rightarrow h = 4$$

$$M \in d \Rightarrow d: a(x-7) + b(y-3) = 0$$

$$\text{Vì } I \text{ cách } d \text{ một khoảng bằng } h \text{ nên } \frac{|-6a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = h = 4 \Leftrightarrow a = 0 \text{ hoặc}$$

$$a = -\frac{12}{5}b$$

$$\text{Suy ra } y = 3 \text{ hoặc } 12x - 5y - 69 = 0$$

Bài 3.75: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 4$ và điểm $M(2;2)$. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$.

Hướng dẫn giải

(C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 2$

Đường thẳng cần tìm có dạng $\Delta: a(x-2) + b(y-2) = 0$

Gọi H là hình chiếu của O lên AB khi đó $OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{3}$

$$\text{Ta có } OH = d(O; \Delta) \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{|-2a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a = (-4 \pm \sqrt{15})b$$

Từ đó ta có hai đường thẳng thỏa mãn là

$$\Delta_1: (-4 + \sqrt{15})x + y + 6 - 2\sqrt{15} = 0 \text{ và } \Delta_2: (-4 - \sqrt{15})x + y + 6 + 2\sqrt{15} = 0$$

Bài 3.76: Cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và hai điểm $A(7;9)$, $B(0;8)$. Tìm M trên đường tròn để $MA + 2MB$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có (C) có tâm $I(1;1)$ và $R = 5$.

Để thấy điểm A và B nằm ngoài đường tròn.

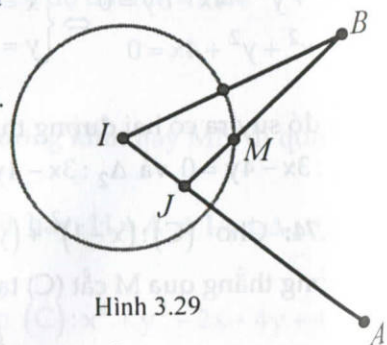
Lấy $J\left(\frac{5}{2}; 3\right)$ suy ra J thuộc đoạn IA,

$$IJ = \frac{5}{2} \text{ và } \overline{IA} = 4\overline{IJ} (*)$$

Với mọi M thuộc (C) ta có

$$MA = 2MJ \Leftrightarrow \overline{MA}^2 = 4\overline{MJ}^2 \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 = 4(\overline{MI} + \overline{IJ})^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} + IA^2 = 4MI^2 + 8\overline{MI} \cdot \overline{IJ} + 4IJ^2$$



Hình 3.29

Đẳng thức này đúng vì $MI = R = 5$, $IA = 10$ và đẳng thức (*).

Ta có: $MA + 2MB = 2(MJ + MB) \geq 2JB$

Để thấy điểm J nằm trong đường tròn do đó dấu "=" xảy ra khi M là giao của JB và (C), M nằm giữa JB.

$$\text{Phương trình đường thẳng JB là } \begin{cases} x = t \\ y = 8 - 2t \end{cases} \Rightarrow M(t; 8 - 2t)$$

$$M \in (C) \Rightarrow (t-1)^2 + (7-2t)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng JB cắt đường tròn (C) tại hai điểm là $M_1(1;6)$ và $M_2(5;-2)$

Ta có $\overline{M_1J}\left(\frac{3}{2}; -3\right)$, $\overline{M_1B}(-1;2)$ suy ra $\overline{M_1J}$, $\overline{M_1B}$ ngược hướng nên M_1 nằm giữa JB

Từ đó suy ra điểm M cần tìm là $M(1;6)$.

Bài 3.77: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. Gọi I là tâm đường tròn (C). Đường thẳng Δ đi qua $M(1;-3)$ cắt (C) tại hai điểm A và B. Viết phương trình đường thẳng Δ biết tam giác IAB có diện tích bằng 8 và cạnh AB là cạnh lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Gọi H là trung điểm AB. Đặt $AH = x$ ($0 < x < 2\sqrt{5}$).

Khi đó ta có

$$\frac{1}{2}IH \cdot AB = 8 \Leftrightarrow x\sqrt{20-x^2} = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \text{ (loại } AB < IA) \end{cases}$$

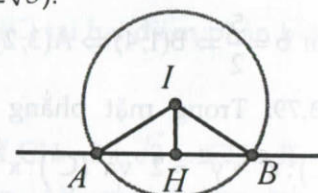
nên $AH = 4 \Rightarrow IH = 2$.

Pt đường thẳng qua M: $a(x-1) + b(y+3) = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow ax + by + 3b - a = 0.$$

$$\text{Ta có } d(I, AB) = IH = 2 \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow a(3a-4b) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = \frac{4}{3}b.$$

Với $a = 0$ ta có pt $\Delta: y + 3 = 0$.



Hình 3.30

* Với $a = \frac{4}{3}b$. Chọn $b = 3$ ta có $a = 4$. Suy ra pt $\Delta: 4x + 3y + 5 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng Δ thỏa mãn là $y + 3 = 0$ và $4x + 3y + 5 = 0$.

Bài 3.78: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC là $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$, H thuộc đường thẳng $\Delta: 3x - y - 4 = 0$, trung điểm AB là $M(2;3)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta tính được tâm $I(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ của đường tròn và $H(2;2)$ là giao điểm của Δ và đường tròn HBC.

Gọi $N(a;b)$ là trung điểm của BC và, khi đó ta có

$$\overline{HA} = 2\overline{IN} \Rightarrow A(2a+1; 2b-3) \Rightarrow B(3-2a; 9-2b).$$

Do $B \in (HBC)$ nên $(3-2a)^2 + (9-2b)^2 - (3-2a) - 5(9-2b) + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 5a - 13b + 23 = 0 \quad (1).$$

Ta có $\overline{BN} = (3a-3; 3b-9)$ và $BN \perp AH$ nên $\overline{BN} \cdot \overline{AH} = 0$.

$$\text{Suy ra } (2a-1)(3a-3) + (2b-5)(3b-9) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 3a - 11b + 16 = 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $2a + 2b = 7$ thế vào phương trình (1) ta được

$$(7-2b)^2 + 4b^2 - 5(7-2b) - 26b + 46 = 0 \Leftrightarrow 2b^2 - 11b + 15 = 0.$$

$$\text{Giải ra ta có } b = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ hoặc } b = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 1.$$

Với $b = 3 \Rightarrow B(2;3)$ (loại vì trùng với M).

$$\text{Với } b = \frac{5}{2} \Rightarrow B(1;4) \Rightarrow A(3;2) \Rightarrow C(1;1)$$

Bài 3.79: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(1;0)$ và các đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$ và $(C'): x^2 + y^2 = 5$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt nằm trên các đường tròn (C) và (C') để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử ΔABC có diện tích lớn nhất. Khi đó $CO \perp AB$, $BO \perp AC$ (Vì nếu không, chẳng hạn CO không vuông góc với AB thì tồn tại điểm C' thuộc đường tròn (C') sao cho $C'O \perp AB$ và $d(C'; AB) > d(C; AB) \Rightarrow S_{C'AB} > S_{CAB}$ vô lý)

Suy ra ΔABC có diện tích lớn nhất thì O là trực tâm của tam giác do đó $BC \perp OA \Rightarrow x_B = x_C$.

$$\text{Ta có } \overline{AB}(x_B-1; y_B), \overline{OC}(x_B; y_C), \overline{OB}(x_B; y_B), \overline{AC}(x_B-1; y_C)$$

$$CO \perp AB \Rightarrow x_B(x_B-1) + y_B y_C = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } B \in (C), C \in (C') \text{ suy ra } x_B^2 + y_B^2 = 2 \quad (2) \text{ và } x_C^2 + y_C^2 = 5 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } x_B = -1, x_B = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ và } x_B = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} |x_A - x_B| |y_C - y_B| \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4} (1 - x_B)^2 (7 - 2x_B)$$

$$\text{Nếu } x_B = -1 \Rightarrow S = 3, x_B = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S < 3 \text{ nên } S \text{ lớn nhất khi và chỉ khi}$$

$x_B = x_C = -1$ khi đó ta xác định được $B(-1;1), C(-1;-2)$ hoặc $B(-1;-1), C(-1;2)$ là điểm cần tìm.

Bài 3.80: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Chứng minh rằng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B và tìm tọa độ điểm C trên (C) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $(3 + \sqrt{2})\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT } (C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9 \text{ có tâm } I(1;-1) \text{ và bán kính } R = 3.$$

$$\text{Ta có } d(I; \Delta) = \frac{|1-1-2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} < R \text{ nên } \Delta \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm phân biệt A, B}$$

$$\text{và } AB = 2\sqrt{7}.$$

Kẻ đường cao CH của ΔABC , ta cần tìm C để $CH = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow CH = R + h \Rightarrow C$ là điểm chính giữa của cung lớn AB của đường tròn (C). Đường thẳng Δ' trung trực của đoạn AB có PT $x - y - 2 = 0 \Rightarrow H(2;0)$

$$\text{Từ } C(t; t-2) \text{ và } \sqrt{2}IC = 3HI \Leftrightarrow t = 1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow C\left(1 - \frac{3}{\sqrt{2}}; -1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Bài 3.81: Trong mặt phẳng Oxy, gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(2;1), B(4;0), C(3;\sqrt{2}-1)$ và đường thẳng $d: 4x + y - 4 = 0$. Tìm trên d điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) qua M tiếp xúc với (C) tại N sao cho diện tích tam giác NAB lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Dễ dàng kiểm tra tam giác ABC vuông tại C hay AB là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi H là hình chiếu của N trên AB thì

$$S_{NAB} = \frac{1}{2} AB \cdot NH \leq \frac{1}{2} AB \cdot R = \frac{AB^2}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi N là trung điểm dây AB hay tiếp tuyến tại N song song với AB có $\overline{AB}(2;2)$. Gọi Δ là tiếp tuyến qua N thì pt của Δ có dạng $x - y - c = 0$. Δ là tiếp tuyến nên $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3+1+c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow c = -2$ hoặc $c = -6$.

Suy ra $\Delta: x - y - 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - y - 6 = 0$ từ đó tìm được N là giao của Δ và d là $M(2; -4)$ hoặc $M(6; -45)$.

Bài 3.82: Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. Gọi B, C là giao điểm của đường thẳng $\Delta: x + y - 3 = 0$ với đường tròn (C). Hãy tìm điểm A trên đường tròn (C) sao cho tam giác ABC có chu vi lớn nhất.

Hướng dẫn giải

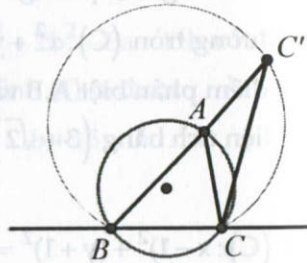
Trên tia đối của tia BA lấy điểm C' sao cho $AC = AC'$. Khi đó ta có $AB + AC = BC'$.

Ta có $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AMB} \Rightarrow$ suy ra C thuộc cung

chứa góc $\frac{1}{2} \widehat{AMB}$ dựng trên đoạn AB. Từ đó

BC' lớn nhất khi BC' là đường kính.

Khi đó A là trung điểm cung lớn BC của (C). Vậy cho tam giác ABC có chu vi lớn nhất khi và chỉ khi đó A là trung điểm cung lớn BC của (C). Từ đó ta xác định được $A(1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2})$.



Hình 3.31

DẠNG TOÁN 4: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Cho đường tròn (C) tâm $I(a; b)$, bán kính R

- Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ thì tiếp tuyến đó đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}(x_0 - a; y_0 - b)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

- Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện: Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d(I; \Delta) = R$ để xác định tiếp tuyến.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm hai điểm $A(1; -1); B(1; 3)$

- Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn
- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A
- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(3; -1)$ bán kính $R = \sqrt{3^2 + 1 - 6} = 2$.

- Ta có: $IA = 2 = R; IB = 2\sqrt{5} > R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn
- Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA} = (2; 0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x - 1) + 0(y + 1) = 0$ hay $x = 1$
- Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$$a(x - 1) + b(y - 3) = 0 \text{ (với } a^2 + b^2 \neq 0) \text{ hay } ax + by - a - 3b = 0$$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a - b - a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3b^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3b = 4a \end{cases}$$

- Nếu $b = 0$, chọn $a = 1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x = 1$.
- Nếu $3b = 4a$, chọn $a = 3, b = 4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x + 4y - 15 = 0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x = 1$ và $3x + 4y - 15 = 0$

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ trong các trường hợp sau đây

- Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x + 3y + 4 = 0$
- Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45°

Lời giải:

- Đường tròn (C) có tâm $I(2; -2)$, bán kính $R = 3$

Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u}(-3; 2)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng

$$-3x + 2y + c = 0$$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-10 + c|}{\sqrt{13}} = 3 \Leftrightarrow c = 10 \pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x + 2y + 10 \pm 3\sqrt{13} = 0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2a - 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow (2a - 2b + c)^2 = 9(a^2 + b^2) (*)$$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45° suy ra

$$\cos(\Delta; Ox) = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow a = b \text{ hoặc } a = -b$$

TH1: Nếu $a = b$ thay vào (*) ta có $18a^2 = c^2 \Leftrightarrow \pm c = 3\sqrt{2}a$, chọn $a = b = 1 \Rightarrow c = \pm 3\sqrt{2}$ suy ra $\Delta: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0$

$$\text{TH2: Nếu } a = -b \text{ thay vào (*) ta có } 18a^2 = (4a + c)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = (3\sqrt{2} - 4)a \\ c = -(3\sqrt{2} + 4)a \end{cases}$$

Với $c = (3\sqrt{2} - 4)a$, chọn $a = 1, b = -1, c = (3\sqrt{2} - 4) \Rightarrow \Delta: x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Với $c = -(3\sqrt{2} + 4)a$, chọn $a = 1, b = -1, c = -(3\sqrt{2} + 4) \Rightarrow \Delta: x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là

$$\Delta_{1,2}: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0, \Delta_3: x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0 \text{ và } \Delta_4: x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$$

Ví dụ 3: Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \text{ và } (C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$$

Lời giải:

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0; 2)$ bán kính $R_1 = 3$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3; -4)$ bán kính $R_2 = 3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta: ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Δ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1, \Delta) = 3 \\ d(I_2, \Delta) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2} (*) \\ |3a - 4b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } |2b + c| = |3a - 4b + c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{-3a + 2b}{2} \end{cases}$$

TH1: Nếu $a = 2b$ chọn $a = 2, b = 1$ thay vào (*) ta được $c = -2 \pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$

TH2: Nếu $c = \frac{-3a + 2b}{2}$ thay vào (*) ta được $|2b - a| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $3a + 4b = 0$

+ Với $a = 0 \Rightarrow c = b$, chọn $b = c = 1$ ta được $\Delta: y + 1 = 0$

+ Với $3a + 4b = 0 \Rightarrow c = 3b$, chọn $a = 4, b = -3, c = -9$ ta được $\Delta: 4x - 3y - 9 = 0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là:

$$2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0, y + 1 = 0, 4x - 3y - 9 = 0$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.83: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của đường tròn trong các trường hợp sau:

a) Điểm tiếp xúc là $M(2; 1)$

b) d đi qua $A(3; 6)$

c) d song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 2008 = 0$

d) d vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x - 3y - 4 = 0$

Hướng dẫn giải

a) $4x + 3y - 11 = 0$

b) $x = 2$ và $39x - 80y + 402 = 0$

c) $3x - 4y + 23 = 0$ và $3x - 4y - 27 = 0$.

d) $3x + 2y + 10 \pm 5\sqrt{13} = 0$

Bài 3.84: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A(2; 5)$. Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ A tới đường tròn. Giả sử tiếp tuyến này tiếp xúc với đường tròn tại hai điểm M, N. Hãy tính độ dài MN.

Hướng dẫn giải

Qua A ta kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn là: $x = 2$ và $y = 5$. Từ đó ta tìm được $M(2; 2), N(-1; 5)$ suy ra $MN = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (5 - 2)^2} = 3\sqrt{2}$

Bài 3.85: Cho (C): $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho ΔABC có diện tích bằng 4.

Hướng dẫn giải

(C) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

Giả sử $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $a > 0$, $b > 0$

Phương trình đường thẳng AB có dạng $AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ hay $bx + ay - ab = 0$.

Ta có $S_{AOB} = 4 \Leftrightarrow ab = 8$, AB tiếp xúc với (C) $\Rightarrow d(I; AB) = \sqrt{5} \Leftrightarrow b - a = -2$

Suy ra $a = 4$, $b = 2$

Vậy phương trình AB: $x + 2y - 4 = 0$

Bài 3.86: Tìm tọa độ giao điểm của hai đường tròn:

$$(C_1)x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0, (C_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$$

và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn ấy.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của hai đường tròn là $A(1; 2)$, $B(3; 4)$

Có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là $3x - y + 3 = 0$, $x + 3y - 17 = 0$

Bài 3.87 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$

và đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d mà qua đó ta kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB} = 60^\circ$.

Hướng dẫn giải

Đường tròn có tâm $I(-1; 2)$ và có bán kính $R = \sqrt{5}$.

$$\widehat{AMB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AMI} = 30^\circ \Rightarrow MI = 2AI = 2\sqrt{5}$$

Từ đó có hai điểm M thỏa mãn $M_1(-3; -2)$, $M_2(3; 4)$

Bài 3.88. Cho $(C_m): x^2 + y^2 + 2mx - 2(m-1)y + 1 = 0$

a) Tìm m để (C_m) là đường tròn

b) Tìm m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x + y + 1 + 2\sqrt{2} = 0$

c) Tìm m để từ điểm $A(7; 0)$ có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với (C_m) vuông góc với nhau.

d) Tìm m để từ điểm $A(7; 0)$ có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với (C_m) và tạo với nhau góc 60° .

Hướng dẫn giải

a) (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases} (*)$, có tâm $I(-m; m-1)$ và bán kính

$$R = \sqrt{2m^2 - 2m}$$

b) (C_m) tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$ (thỏa mãn $(*)$)

c) Gọi hai tiếp điểm là H, K từ giả thiết suy ra AHİK là hình vuông $\Rightarrow AI = \sqrt{2}R \Rightarrow m = 4 \pm \sqrt{41}$

d) TH1: Nếu $\widehat{HAK} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{IAK} = 30^\circ \Rightarrow IA = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases}$

TH2: $\widehat{HAK} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{IAK} = 60^\circ \Rightarrow IA = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 25 \\ m = -3 \end{cases}$

Bài 3.89 Trong mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(-3; 1)$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng $T_1 T_2$.

Hướng dẫn giải

C1: (C) có tâm $I(1; 3)$ bán kính $R = 2$.

Giả sử $T_1(x_1; y_1)$, $T_2(x_2; y_2)$ là các tiếp điểm của các tiếp tuyến MT_1 và MT_2 .

$$MT_1: (x-1)(x_1-1) + (y-3)(y_1-3) = 4, MT_2: (x-1)(x_2-1) + (y-3)(y_2-3) = 4$$

$$\text{Do hai tiếp tuyến đều đi qua điểm } M(-3; 1) \Rightarrow \begin{cases} 4(1-x_1) + 2(3-y_1) = 4 \\ 4(1-x_2) + 2(3-y_2) = 4 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } T_1 T_2: 2x + y - 3 = 0$$

C2: Dựa vào điểm $M(-3; 1)$ và đường tròn có tâm $I(1; 3)$ và bán kính $R = 2$ nên thấy ngay đường thẳng $y = 1$ là một tiếp tuyến của đường tròn qua M suy ra tiếp điểm $T_2(1; 1)$. Tiếp điểm T_1 đối xứng với T_2 qua đường MI nên nằm trên đường thẳng đi qua T_2 và vuông góc với MI do đó $T_1 T_2: 2x + y - 3 = 0$

§5. ĐƯỜNG ELIP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) **Định nghĩa:** Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c (c > 0)$ và hằng số $a > c$. Elip(E) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Các điểm F_1, F_2 là tiêu điểm của (E). Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự của (E). MF_1, MF_2 được gọi là bán kính qua tiêu.

2) **Phương trình chính tắc của elip:**

Với $F_1(-c;0), F_2(c;0)$:

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

trong đó $b^2 = a^2 - c^2$

(1) được gọi là phương trình chính tắc của (E)

3) **Hình dạng và tính chất của elip:**

Elip có phương trình (1) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

+ Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$

+ Các đỉnh: $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$

+ Trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, nằm trên trục Ox; trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$, nằm trên trục Oy

+ Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là hình chữ nhật cơ sở.

+ Tâm sai: $e = \frac{c}{a} < 1$

+ Bán kính qua tiêu điểm của điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc (E) là:

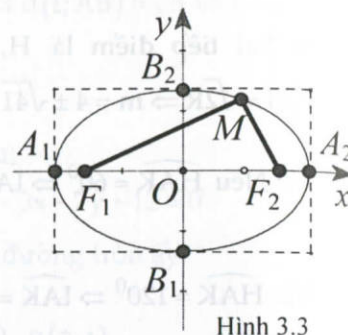
$$MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M, MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA ELIP KHI BIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELIP.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Từ phương trình chính tắc ta xác định các đại lượng a, b và $b^2 = a^2 - c^2$ ta tìm được c elip từ đó ta suy ra được các yếu tố cần tìm.



Hình 3.3

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Xác định các đỉnh, độ dài trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) $4x^2 + 25y^2 = 100$

Lời giải:

a) Từ phương trình của (E) ta có $a = 2, b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0); A_2(2;0); B_1(0;-1); B_2(0;1)$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 4$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 2$

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3};0); F_2(\sqrt{3};0)$,

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Ta có $4x^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ suy ra $a = 5; b = 2$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$$

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1(-5;0); A_2(5;0); B_1(0;-2); B_2(0;2)$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 10$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 4$

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{21}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{21};0); F_2(\sqrt{21};0)$,

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.90: Xác định các đỉnh, độ dài trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip (E):

a) $x^2 + 2y^2 = 18$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Hướng dẫn giải

a) $x^2 + 2y^2 = 18 \Leftrightarrow \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$a = 3\sqrt{2}; b = 3 \Rightarrow c = 3$$

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-3\sqrt{2};0); A_2(3\sqrt{2};0); B_1(0;-3); B_2(0;3)$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 6\sqrt{2}$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 6$

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 6$, tiêu điểm là $F_1(-3;0); F_2(3;0)$,

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Từ phương trình của (E) ta có $a = 4, b = 3 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-4;0); A_2(4;0); B_1(0;-3); B_2(0;3)$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 8$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 6$

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{7}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{7};0); F_2(\sqrt{7};0)$,

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

DẠNG TOÁN 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG ELIP.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để viết phương trình chính tắc của elip ta làm như sau:

+ Gọi phương trình chính tắc elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

+ Từ giả thiết của bài toán ta thiết lập các phương trình, hệ phương trình từ giả thiết của bài toán để tìm các đại lượng a, b của elip từ đó viết được phương trình chính tắc của nó.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) (E) có độ dài trục lớn là 6 và tâm sai $e = \frac{2}{3}$

b) (E) có tọa độ một đỉnh là $(0; \sqrt{5})$ và đi qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}; -1\right)$

c) (E) có tiêu điểm thứ nhất $(-\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm $M(1; \frac{4\sqrt{33}}{5})$.

d) Hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $y + 2 = 0$ và có diện tích bằng 48.

e) (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Lời giải

Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

a) (E) có độ dài trục lớn là 6 suy ra $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

Tâm sai $e = \frac{2}{3}$ nên $\frac{c}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow c = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 5$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

b) (E) có một đỉnh có tọa độ là $(0; \sqrt{5})$ nằm trên trục tung nên $b = \sqrt{5}$ do đó

phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1 (a > \sqrt{5})$.

Mặt khác (E) đi qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}; -1\right)$ nên $\frac{160}{25a^2} + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow a^2 = 8$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$

c) (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ nên $c = \sqrt{3}$ suy ra $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3$ (1)

Mặt khác $M\left(1; \frac{4\sqrt{33}}{5}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{528}{25b^2} = 1$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được

$$\frac{1}{b^2 + 3} + \frac{528}{25b^2} = 1 \Leftrightarrow 25b^4 - 478b^2 - 1584 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 22 \Rightarrow a^2 = 25$$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{22} = 1$

d) (E) có hình chữ nhật cơ sở có một cạnh nằm trên đường thẳng $y + 2 = 0$ suy ra $b = 2$

Mặt khác hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng 48 nên $2a \cdot 2b = 48 \Rightarrow a = 6$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$

e) (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ suy ra $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ hay $4a^2 = 9b^2$ (3)

Hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20 suy ra $4(a + b) = 20$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $a = 3, b = 2$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.91: Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

- a) Tâm sai bằng $\frac{4}{5}$ và đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (E) có phương trình $x^2 + y^2 = 34$
- b) Độ dài trục lớn bằng 15, (E) đi qua M sao cho $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ và diện tích tam giác MF_1F_2 bằng 26.
- c) (E) đi qua $M\left(\frac{3\sqrt{14}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M.
- d) Tiêu cự bằng 6 và đường tròn nội tiếp tam giác OF_2B_2 có bán kính bằng 1. (Với F_2 là tiêu điểm phải của (E) và B_2 đỉnh của (E) có tung độ dương).
- e) (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.
- f) (E) có một tiêu điểm $F_1(-7;0)$ và đi qua $M(-2;12)$
- g) (E) đi qua điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ và có tiêu cự $4\sqrt{3}$
- h) (E) đi qua hai điểm $M\left(3; \frac{4}{5}\right)$, $N\left(-4; \frac{3}{5}\right)$
- k) (E) đi qua $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tâm sai $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

- a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- b) $S_{MF_1F_2} = 26$, $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \Rightarrow MF_1 \cdot MF_2 = 52$ và $MF_1^2 + MF_2^2 = (2c)^2$.
Độ dài trục lớn bằng 15 $\Rightarrow 2a = 15 = MF_1 + MF_2$.
Mặt khác $(MF_1 + MF_2)^2 = MF_1^2 + MF_2^2 + 2MF_1MF_2$
nên $(15)^2 = (2c)^2 + 2 \cdot 52 \Rightarrow c^2 = \frac{121}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{104}{4}$ do đó (E): $\frac{x^2}{\frac{225}{4}} + \frac{y^2}{\frac{104}{4}} = 1$
- c) $M \in (E) \Rightarrow \frac{63}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 8$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M

$$\Rightarrow \vec{F_1M} \cdot \vec{F_2M} = 0 \Leftrightarrow c^2 = 8 = a^2 - b^2$$

$$\text{Suy ra } a^2 = 9, b^2 = 1 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$d) \text{ Ta có } S_{OB_2F_2} = pr = \frac{1}{2} OB_2 OF_2 \Rightarrow \sqrt{b^2 + 9} + 3 + b = 3b \Leftrightarrow b = 4$$

$$\text{Tiêu cự bằng 6 suy ra } 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 25$$

$$\text{Vậy (E): } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$e) \text{ ĐS: (E): } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$f) \text{ (E): } \frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{147} = 1$$

$$g) \text{ (E): } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$h) \text{ (E): } \frac{x^2}{25} + y^2 = 1$$

$$k) \text{ (E): } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

DẠNG TOÁN 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM NẪM TRÊN ĐƯỜNG ELIP THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc elip có phương trình chính tắc là

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0) \text{ ta làm như sau}$$

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có tiêu điểm F_1 và F_2 .

Tìm điểm M trên (E) sao cho

- Điểm M có tung độ gấp ba lần hoành độ
- $MF_1 = 2MF_2$
- $\widehat{F_1MF_2} = 60^\circ$
- Diện tích tam giác ΔOAM lớn nhất với $A(1;1)$

Lời giải

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (E)$ suy ra $\frac{x_M^2}{25} + \frac{y_M^2}{9} = 1$ (*)

a) Điểm M có tung gấp ba lần hoành độ do đó $y_M = 3x_M$ thay vào (*) ta được

$$\frac{x_M^2}{25} + \frac{(3x_M)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 26x_M^2 = 25 \Leftrightarrow x_M = \pm \frac{5}{\sqrt{26}}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(\frac{5}{\sqrt{26}}; \frac{15}{\sqrt{26}}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}; -\frac{15}{\sqrt{26}}\right)$

b) Từ phương trình (E) có $a^2 = 25, b^2 = 9$ nên $a = 5, b = 3, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

Theo công thức tính bán kính qua tiêu điểm ta có :

$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M = 5 + \frac{4}{5}x_M \text{ và } MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M = 5 - \frac{4}{5}x_M$$

Theo giả thiết $MF_1 = 2MF_2$ suy ra $5 + \frac{4}{5}x_M = 2\left(5 - \frac{4}{5}x_M\right) \Leftrightarrow x_M = \frac{25}{12}$

Thay vào (*) ta có : $\frac{25}{144} + \frac{y_M^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y_M = \pm \frac{\sqrt{119}}{4}$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là: $M_1\left(\frac{25}{12}; \frac{\sqrt{119}}{4}\right)$ và $M_2\left(\frac{25}{12}; -\frac{\sqrt{119}}{4}\right)$

c) Ta có $F_1(-4;0), F_2(4;0) \Rightarrow \overline{MF_1}(x_M+4; y_M), \overline{MF_2}(x_M-4; y_M)$

$$\text{Vì } \widehat{F_1MF_2} = 60^\circ \text{ nên } \cos 60^\circ = \frac{\overline{MF_1} \cdot \overline{MF_2}}{|\overline{MF_1}| \cdot |\overline{MF_2}|} = \frac{x_M^2 + y_M^2 - 16}{\left(5 + \frac{4}{5}x_M\right)\left(5 - \frac{4}{5}x_M\right)}$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 - 16 = \frac{1}{2}\left(25 - \frac{16}{25}x_M^2\right)$$

Suy ra $\frac{x_M^2}{25} = \frac{57}{66} - \frac{y_M^2}{33}$ thế vào (*) ta được $\frac{57}{66} - \frac{y_M^2}{33} + \frac{y_M^2}{9} = 1 \Rightarrow y_M = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\text{và } x_M = \pm \frac{5\sqrt{13}}{4}$$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là $M_1\left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right),$

$$M_2\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_3\left(\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ và } M_4\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

d) Ta có $\overline{OA}(1;1)$ nên đường thẳng đi qua hai điểm O, A nhận $\vec{n}(-1;1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là $-x + y = 0$

$$S_{OAM} = \frac{1}{2}OA.d(M;OA) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \frac{|-x_M + y_M|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}|-x_M + y_M|$$

Áp dụng bất đẳng thức Bnhiacôpxki ta có

$$S_{OAM} = \frac{1}{2}\left|-5 \cdot \frac{x_M}{5} + 3 \cdot \frac{y_M}{3}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot \left(\frac{x_M^2}{25} + \frac{y_M^2}{9}\right) = \frac{34}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $-\frac{x_M}{25} = \frac{y_M}{9}$ kết hợp với (*) ta được

$$\begin{cases} x_M = \frac{25}{\sqrt{34}} \\ y_M = -\frac{9}{\sqrt{34}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_M = -\frac{25}{\sqrt{34}} \\ y_M = \frac{9}{\sqrt{34}} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm $M_1\left(\frac{25}{\sqrt{34}}; -\frac{9}{\sqrt{34}}\right)$ và $M_2\left(-\frac{25}{\sqrt{34}}; \frac{9}{\sqrt{34}}\right)$ thỏa mãn yêu cầu

bài toán

Ví dụ 2: Cho elip (E) : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và $C(2;0)$. Tìm A, B thuộc (E) biết A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

Lời giải

Giả sử $A(x_0; y_0)$. Vì A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên $B(x_0; -y_0)$ với $y_0 > 0$.

Vì $A \in (E)$ nên $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$ (1)

Vì tam giác ABC đều

$$\text{Nên } AB^2 = AC^2 \Rightarrow (-2y_0)^2 = (2-x_0)^2 + (-y_0)^2 \Leftrightarrow 3y_0^2 = 4 - 4x_0 + x_0^2 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có

$$3\left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right) = 4 - 4x_0 + x_0^2 \Leftrightarrow 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{2}{7} \end{cases}$$

+ Nếu $x_0 = 2$ thay vào (1) ta có $y_0 = 0$. Trường hợp này loại vì $A \equiv C$

+ Nếu $x_0 = \frac{2}{7}$ thay vào (1) ta có $y_0 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.92: Trong mặt phẳng Oxy, cho elip: $9x^2 + 25y^2 = 225$ có tiêu điểm F_1 và F_2 . Tìm các điểm M trên (E) sao cho

a) $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{4}{F_1F_2}$

b) $\widehat{F_1MF_2} = 60^\circ$

c) Diện tích tứ giác OHMK lớn nhất với H, K là hình chiếu của điểm M lên hai trục tọa độ.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (E) \Rightarrow 9x_M^2 + 25y_M^2 = 225$

Ta có $a = 5, b = 3 \Rightarrow c = 4$

a) Ta có $MF_1 = 5 + \frac{4x_M}{5}, MF_2 = 5 - \frac{4x_M}{5}$

Do đó $\frac{1}{MF_1} + \frac{1}{MF_2} = \frac{16}{F_1F_2} \Leftrightarrow \frac{1}{5 + \frac{4x_M}{5}} + \frac{1}{5 - \frac{4x_M}{5}} = \frac{4}{8} \Leftrightarrow x_M = \pm \frac{5\sqrt{5}}{4}$

Suy ra $y_M = \pm \frac{3\sqrt{11}}{4}$

Vậy có bốn điểm $M_1\left(\frac{5\sqrt{5}}{4}; \frac{3\sqrt{11}}{4}\right), M_2\left(-\frac{5\sqrt{5}}{4}; \frac{3\sqrt{11}}{4}\right), M_3\left(-\frac{5\sqrt{5}}{4}; -\frac{3\sqrt{11}}{4}\right)$

và $M_4\left(\frac{5\sqrt{5}}{4}; -\frac{3\sqrt{11}}{4}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Ta có $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cos \widehat{F_1MF_2}$

$\Leftrightarrow 64 = \left(5 + \frac{4x_M}{5}\right)^2 + \left(5 - \frac{4x_M}{5}\right)^2 - \left(5 + \frac{4x_M}{5}\right)\left(5 - \frac{4x_M}{5}\right)$

$\Leftrightarrow x_M = \pm \frac{5\sqrt{13}}{4} \Rightarrow y_M = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$

c) $S_{OHMK} = |x_M y_M|$. Theo BDT Cauchy ta có

$9x_M^2 + 25y_M^2 = 225 \geq 2\sqrt{9x_M^2 \cdot 25y_M^2} = 30\sqrt{x_M y_M} \Rightarrow x_M y_M \leq \frac{15}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $9x_M^2 = 25y_M^2 \Rightarrow x_M = \pm \frac{5}{\sqrt{2}}, y_M = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$

Bài 3.93: Cho $A(0; 3)$. Tìm điểm B, C thuộc elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ sao cho B, C đối xứng qua trục Ox đồng thời thỏa mãn $\triangle ABC$ đều.

Hướng dẫn giải

Giả sử $B(x_0; y_0)$ suy ra $C(x_0; -y_0)$ với $y_0 > 0$.

Vì $B \in (E)$ nên $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 3y_0^2 = 9$

Ta có $BC = 2y_0$ và phương trình (BC): $x = x_0 \Rightarrow d(A; (BC)) = |3 - x_0|$

$\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow d(A; (BC)) = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$

Từ đó $B(0; \sqrt{3}), C(0; -\sqrt{3})$

Bài 3.94: Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 24 = 0$. Tìm M trên (E) có khoảng cách đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1$. Thì $d(M; \Delta) = \frac{|3x_0 + 4y_0 + 24|}{5}$

Ta có: $(3x_0 + 4y_0)^2 = \left(9 \cdot \frac{x_0}{3} + 8 \cdot \frac{y_0}{2}\right)^2 \leq (9^2 + 8^2) \left(\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4}\right) = 145$.

ĐS: $\min d(M; \Delta) = \frac{24 - \sqrt{145}}{5}$ khi $x_0 = -\frac{27}{\sqrt{145}}, y_0 = -\frac{4}{\sqrt{145}}$.

$\max d(M; \Delta) = \frac{24 + \sqrt{145}}{5}$ khi $x_0 = \frac{27}{\sqrt{145}}, y_0 = \frac{4}{\sqrt{145}}$.

Bài 3.95: Cho (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ có tiêu điểm $F_1(-c; 0)$.

a) Tìm $M \in (E)$ trong trường hợp sau:

i) Đoạn thẳng F_1M ngắn nhất

ii) Đoạn thẳng F_1M dài nhất

b) Tìm hai điểm A, B thuộc (E) thỏa mãn $OA \perp OB$ và $S_{\triangle OAB}$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a) $F_1M = a + \frac{c}{a}x, -a \leq x \leq a \Rightarrow a - c \leq F_1M \leq a + c$

i) $M(-a;0)$ ii) $M(a;0)$

b) Nếu A, B trùng với các đỉnh của (E) thì $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}ab$. Nếu A, B khác các

đỉnh của (E) thì phương trình đường thẳng $OA: y = kx$, $OB: y = -\frac{1}{k}x$.

$$\text{Ta tính được } S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \frac{(1+k^2)a^2b^2}{\sqrt{(a^2+b^2k^2)(b^2+a^2k^2)}} \Rightarrow S_{\Delta OAB} \geq \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$A\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right); B\left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Bài 3.96: Cho $(C): (x+5)^2 + y^2 = 441$; $(C'): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Gọi M là tâm đường tròn (C_1) di động tiếp xúc với $(C), (C')$. Chứng minh rằng tập hợp điểm M là elip và hãy tìm tọa độ các tiêu điểm của elip đó trong trường hợp sau:

a) (C_1) tiếp xúc trong với (C) và tiếp xúc ngoài với (C')

b) (C_1) tiếp xúc trong với (C) và (C')

Hướng dẫn giải

$$(C): O(-5;0), R=21; (C'): O'(5;0), R'=5$$

a) $M(x,y)$ là tâm khi đó $R-R_1=MO; R'+R_1=MO' \Rightarrow MO+MO'=R+R'=26$

$$\text{Suy ra tập hợp điểm } M \text{ là elip có phương trình } \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

b) $M(x,y)$ là tâm khi đó $R-R_1=MO; R_1-R=MO' \Rightarrow MO+MO'=R-R'=16$

$$\text{Suy ra tập hợp điểm } M \text{ là elip có phương trình } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

Bài 3.97. Cho hình thoi $ABCD$ tâm I . Biết $A(-2;-2), B(0;2)$ và tâm I thuộc

$$\text{đường Elip } (E): \frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = 1. \text{ Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Gọi } I(x_0; y_0) \Rightarrow \overline{AI} = (x_0+2; y_0+2), \overline{IB} = (x_0; y_0-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I \in (E) \\ \overline{AI} \cdot \overline{IB} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_0^2}{4} + \frac{3y_0^2}{4} = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_0^2 = \frac{1}{3}(4-x_0^2) \\ x_0^2 + \frac{1}{3}(4-x_0^2) + 2x_0 - 4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_0^2 = \frac{1}{3}(4-x_0^2) \\ x_0^2 + 3x_0 - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{array} \right\} \text{ hoặc } \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow I(1;1) \text{ hoặc } I(1;-1).$$

• Với $I(1;1)$ thì $C(4;4), D(2;0)$

• Với $I(1;-1)$ thì $C(4;0), D(2;-4)$

Bài 3.98: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Biết $A(1;-1), B(-1;3)$ và B thuộc Elip

$(E): x^2 + 3y^2 = 4$. Tính tọa độ hai đỉnh B và D của hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải

$$\text{Gọi } B(x_0; y_0) \Rightarrow \overline{AB} = (x_0-1; y_0+1), \overline{CB} = (x_0+1; y_0-3)$$

$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} B \in (E) \\ \overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 + 3y_0^2 = 4 \\ (x_0-1)(x_0+1) + (y_0+1)(y_0-3) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 + 3y_0^2 = 4 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 = 4 - 3y_0^2 \\ 4 - 3y_0^2 + y_0^2 - 2y_0 - 4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 = 4 - 3y_0^2 \\ y_0^2 + y_0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 = 4 \\ y_0 = 0 \end{array} \right\} \text{ hoặc } \left\{ \begin{array}{l} x_0^2 = 1 \\ y_0 = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow B(-2;0), D(2;2) \text{ hoặc } B(2;0), D(-2;2) \text{ hoặc } B(-1;-1), D(1;3)$$

§6. ĐƯỜNG HYPEBOL

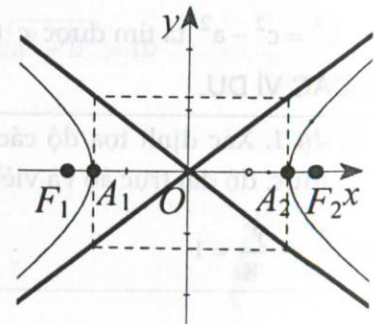
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa:** Cho hai điểm cố định F_1, F_2

với $F_1F_2 = 2c (c > 0)$ và hằng số $a < c$.

Hypebol là tập hợp các điểm M thỏa mãn $|MF_1 - MF_2| = 2a$. Kí hiệu (H)

Ta gọi: F_1, F_2 là **tiêu điểm** của (H) . Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ là **tiêu cự** của (H) .



Hình 3.4

2. **Phương trình chính tắc của hypebol:**

Với $F_1(-c;0), F_2(c;0)$

$$M(x;y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = c^2 - a^2 \quad (2)$$

Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của hypebol

3. Hình dạng và tính chất của (H):

- + Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$
- + Các đỉnh: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$
- + Trục Ox gọi là trục thực, Trục Oy gọi là trục ảo của hypebol. Khoảng cách $2a$ giữa hai đỉnh gọi là độ dài trục thực, $2b$ gọi là độ dài trục ảo.
- + Hypebol gồm hai phần nằm hai bên trục ảo, mỗi phần gọi là nhánh của hypebol
- + Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là hình chữ nhật cơ sở. Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai đường tiệm cận của hypebol và có phương trình là $y = \pm \frac{b}{a}x$

+ Tâm sai: $e = \frac{c}{a} > 1$

+ $M(x_M; y_M)$ thuộc (H) thì:

$$MF_1 = |a + ex_M| = \left| a + \frac{c}{a}x_M \right|, MF_2 = |a - ex_M| = \left| a - \frac{c}{a}x_M \right|$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA HYPEBOL KHI BIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA CHÚNG.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Từ phương trình chính tắc của hypebol ta xác định các đại lượng a, b và $b^2 = c^2 - a^2$ ta tìm được c từ đó ta suy ra được các yếu tố cần tìm.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm; tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của (H)

a) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$

b) $5x^2 - 4y^2 = 20$

Lời giải

a) Ta có $a^2 = 6, b^2 = 8$ nên $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$

Do đó ta có hypebol có:

Tọa độ các đỉnh là $A_1(-\sqrt{6};0); A_2(\sqrt{6};0)$

Tiêu điểm là $F_1(-10;0); F_2(10;0)$

Tâm sai của (H) là $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{\sqrt{6}}$

Độ dài trục thực $2a = 2\sqrt{6}$, độ dài trục ảo $2b = 4\sqrt{2}$

Đường tiệm cận có phương trình là $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}x$

b) Viết lại phương trình (H) là: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, có $a^2 = 4, b^2 = 5$

nên $a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$

Do đó ta có hypebol có:

Tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0); A_2(2;0)$

Tiêu điểm là $F_1(-3;0); F_2(3;0)$

Tâm sai của (H) là $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

Độ dài trục thực $2a = 4$, độ dài trục ảo $2b = 2\sqrt{5}$

Đường tiệm cận có phương trình là $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.99: Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm; tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của hypebol (H):

a) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{6} = 1$

b) $9x^2 - 12y^2 = 108$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a^2 = 8, b^2 = 6$ nên $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$

Do đó ta có hypebol có:

Tọa độ các đỉnh là $A_1(-2\sqrt{2};0); A_2(2\sqrt{2};0)$

Tiêu điểm là $F_1(-10;0); F_2(10;0)$

Tâm sai của (H) là $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Độ dài trục thực $2a = 4\sqrt{2}$, độ dài trục ảo $2b = 2\sqrt{6}$

Đường tiệm cận có phương trình là $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$

b) Viết lại phương trình (H) là: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{9} = 1$, có $a^2 = 12, b^2 = 9$

$$\text{Nên } a = 2\sqrt{3}, b = 3, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21}$$

Do đó ta có hypebol có:

$$\text{Tọa độ các đỉnh là } A_1(-2\sqrt{3}; 0); A_2(2\sqrt{3}; 0)$$

$$\text{Tiêu điểm là } F_1(-\sqrt{21}; 0); F_2(\sqrt{21}; 0)$$

$$\text{Tâm sai của (H) là } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Độ dài trục thực } 2a = 4\sqrt{3}, \text{ độ dài trục ảo } 2b = 6$$

$$\text{Đường tiệm cận có phương trình là } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

DẠNG TOÁN 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA HYPEBOL.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để viết phương trình chính tắc của hypebol ta làm như sau:

- + Gọi phương trình chính tắc hypebol là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$
- + Từ giả thiết của bài toán ta thiết lập các phương trình, hệ phương trình từ giả thiết của bài toán để tìm các đại lượng a, b của hypebol từ đó viết được phương trình chính tắc của nó.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4; 0)$ và độ dài trục ảo bằng $\sqrt{28}$

b) (H) có tiêu cự bằng 10 và đường tiệm cận là $y = \pm \frac{4}{3}x$

c) (H) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48

d) (H) đi qua hai điểm $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ và $N(-1; -\sqrt{3})$

e) (H) đi qua $M(-2; 1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° .

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$

- a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4; 0)$ suy ra $c = 4$; độ dài trục ảo bằng $\sqrt{28}$ suy ra $2b = \sqrt{28} \Rightarrow b^2 = 7, a^2 = c^2 - b^2 = 9$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

b) (H) có tiêu cự bằng 10 suy ra $2c = 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ (1); đường tiệm cận là $y = \pm \frac{4}{3}x$ suy ra $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ hay $b^2 = \frac{16}{9}a^2$ (2)

Thế (2) vào (1) $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 16$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

c) Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ suy ra $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ hay $4a^2 = 9b^2$ (3)

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 24 suy ra $2a \cdot 2b = 48 \Leftrightarrow ab = 12$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a^2 = 18, b^2 = 8$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$

d) (H) đi qua hai điểm $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ và $N(-1; -\sqrt{3})$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2}{5} \\ b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{\frac{2}{5}} - \frac{y^2}{2} = 1$

e) $M(-2; 1) \in (H)$ nên $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ (*)

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$$\Delta_1: y = \frac{b}{a}x \text{ hay } bx - ay = 0; \Delta_2: y = -\frac{b}{a}x \text{ hay } bx + ay = 0$$

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° nên $\cos 60^\circ = \frac{|b^2 - a^2|}{b^2 + a^2}$

Hay $\frac{1}{2} = \frac{|b^2 - a^2|}{b^2 + a^2} \Leftrightarrow 2|b^2 - a^2| = b^2 + a^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(b^2 - a^2) = b^2 + a^2 \\ 2(b^2 - a^2) = -(b^2 + a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ a^2 = 3b^2 \end{cases}$$

+ Với $b^2 = 3a^2$ thay vào (*) được $a^2 = \frac{11}{3}$, $b^2 = 11$

Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$

+ Với $a^2 = 3b^2$ thay vào (*) được $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{3}$

Suy ra phương trình hypebol là (H): $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Vậy có có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là

$$\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1 \text{ và } \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.100: Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có tâm sai $e = 2$, các tiêu điểm của (H) trùng với các tiêu điểm của elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Độ dài trục ảo là 6 và phương trình một đường tiệm cận là $3x - 4y = 0$.

c) (H) đi qua điểm điểm A $\left(-4; \frac{2\sqrt{7}}{3}\right)$ và phương trình 2 đường tiệm cận là $2x \pm 3y = 0$

d) (H) đi qua điểm M(6;3) và góc giữa 2 đường tiệm cận bằng 60°

e) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x \pm 5 = 0$; $y \pm 4 = 0$

f) Độ dài trục ảo là 6 và hai tiệm cận vuông góc với nhau.

g) Đi qua M $\left(3; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ và 2 đường chuẩn có phương trình: $3x \pm 4 = 0$

h) Khoảng cách giữa các đường chuẩn là $\frac{32}{\sqrt{7}}$ và phương trình 2 đường tiệm cận là $3x \pm 4y = 0$

k) (H) đi qua A(1;0) và B($\sqrt{3}$;1)

(H) có tiêu điểm $F_1(-7;0)$ và đi qua M(-2;12)

Hướng dẫn giải

a) (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

b) (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

c) (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

d) (H): $\frac{x^2}{33} - \frac{y^2}{99} = 1$ hoặc (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

e) (H): $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

f) (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

g) $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

h) $x^2 - \frac{y^2}{48} = 1$

DẠNG TOÁN 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM NẪM TRÊN HYPEBOL THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc hypebol có phương trình chính tắc là

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0 \text{ ta làm như sau}$$

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2} - \frac{y_M^2}{b^2} = 1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$ có tiêu điểm F_1 và F_2 .

Tìm điểm M trên (H) trong trường hợp sau:

- Điểm M có hoành độ là 4
- Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.
- Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3

d) Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$

Lời giải

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (H)$ suy ra $\frac{x_M^2}{9} - \frac{y_M^2}{6} = 1$ (*)

a) Ta có $x_M = 4$ suy ra

$$y_M = \pm \sqrt{6\left(\frac{x_M^2}{9} - 1\right)} = \pm \frac{\sqrt{42}}{3} \Rightarrow M_1\left(4; \frac{\sqrt{42}}{3}\right); M_2\left(4; -\frac{\sqrt{42}}{3}\right)$$

b) Từ phương trình (H) có $a^2 = 9, b^2 = 6$ nên $a = 3, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15}$

Suy ra $F_1(-\sqrt{15}; 0); F_2(\sqrt{15}; 0)$

Ta có: $\overline{F_1M} = (x_M + \sqrt{15}; y_M); \overline{F_2M} = (x_M - \sqrt{15}; y_M)$

Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông nên

$\overline{F_1M} \cdot \overline{F_2M} = 0 \Leftrightarrow (x_M + \sqrt{15})(x_M - \sqrt{15}) + y_M^2 = 0 \Leftrightarrow y_M^2 = 15 - x_M^2$ thế vào (*) ta

$$\text{được } \frac{x_M^2}{9} - \frac{15 - x_M^2}{6} = 1 \Leftrightarrow x_M = \pm \sqrt{\frac{63}{5}} \text{ suy ra } y_M = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}$$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là

$$M_1\left(\sqrt{\frac{63}{5}}; \sqrt{\frac{12}{5}}\right), M_2\left(-\sqrt{\frac{63}{5}}; \sqrt{\frac{12}{5}}\right), M_3\left(\sqrt{\frac{63}{5}}; -\sqrt{\frac{12}{5}}\right) \text{ và } M_4\left(-\sqrt{\frac{63}{5}}; -\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$$

$$\text{c) Ta có } MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right| \text{ nên } 3 = \left|3 + \frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right| \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0(1) \\ x_M = \frac{-18}{\sqrt{15}} \Rightarrow y_M = \pm \frac{\sqrt{210}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy có 2 điểm: } M_1\left(-\frac{18}{\sqrt{15}}; \frac{\sqrt{210}}{5}\right) \text{ và } M_2\left(-\frac{18}{\sqrt{15}}; -\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$$

$$\text{d) Phương trình hai tiệm cận là: } d_1: y = \frac{\sqrt{6}}{3}x; d_2: y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x.$$

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ suy ra

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M - y_M\right|}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}}} + \frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M + y_M\right|}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}}} = \frac{24\sqrt{2}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M\right| + \left|\sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5} \quad (**)$$

Mặt khác (*) $\Leftrightarrow (\sqrt{6}x_M - 3y_M)(\sqrt{6}x_M + 3y_M) = 54 > 0$ suy ra

$$(**) \Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M + \sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5} \Leftrightarrow x_M = \pm \frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_M = \pm \frac{\sqrt{330}}{5}$$

Vậy có bốn điểm $M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{330}}{5}\right), M_2\left(\frac{12}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{330}}{5}\right), M_3\left(-\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ và

$M_4\left(-\frac{12}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.101: Cho (H): $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{4} = 1$ và $A(3; 2), B(0; 1)$. Tìm điểm $C \in (H)$ sao cho

ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

$$AB: x - y + 1 = 0; AB = 3\sqrt{2}, C(x_0; y_0) \in (H) \Rightarrow \frac{x_0^2}{7} - \frac{y_0^2}{4} = 1$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; AB) = \frac{3}{2} |x_0 - y_0 - 1|$$

Đặt $P = x_0 - y_0 - 1$, suy ra hệ $\begin{cases} \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ P = x - y - 1 \end{cases}$ có nghiệm với tham số P. Từ

đây suy ra $P \geq \sqrt{3} - 1$ hoặc $P \leq -\sqrt{3} - 1$ do đó $|P| \geq \sqrt{3} - 1$

Vậy $C\left(\frac{7}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ thì ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

Bài 3.102: Cho (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Có tiêu điểm là F_1 (trái) và F_2 (phải)

a) Tìm M trên (H) với $MF_1 = 4$.

b) Tìm trên (H) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$

c) Tìm trên một nhánh của (H) hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều

Hướng dẫn giải

Ta có $a = 2, b = \sqrt{12} \Rightarrow c^2 = 4 + 12 = 16, c = 4$

$$\text{a) } MF_1 = 4 \Leftrightarrow \left|2 + \frac{4}{2}x_M\right| = 4 \Leftrightarrow x_M = 1 \text{ hoặc } x_M = -3$$

Từ đó ta tìm được 2 điểm là $M_1(-3; \sqrt{15})$, $M_2(-3; -\sqrt{15})$

$$b) MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow |2 + 2x_M| = 2|2 - 2x_M| \Leftrightarrow x_M^2 + 2x_M + 1 = 4x_M^2 - 8x_M + 4 \\ \Leftrightarrow 3x_M^2 - 10x_M + 3 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 \text{ hoặc } x_M = \frac{1}{3}$$

Từ đó ta tìm được 2 điểm là $M_1(3; \sqrt{15})$, $M_2(3; -\sqrt{15})$

c) Vì tam giác ABC đều và tính đối xứng của (H) nên A, B đối xứng nhau qua trục hoành.

Giả sử $A(a; b) \Rightarrow B(a; -b)$

$$\text{Do đó tam giác ABC đều} \Leftrightarrow \cos \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 = 3b^2 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } A \in (H) \Rightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{12} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) kết hợp với điều kiện hai điểm A, B thuộc một nhánh suy ra

$$A\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

§7. ĐƯỜNG PARABOL

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa:** Cho điểm cố định F và đường thẳng cố định Δ không đi qua F.

Parabol(P) là tập hợp các điểm M cách đều điểm F và đường thẳng Δ .

Điểm F gọi là *tiêu điểm* của parabol.

Đường thẳng Δ được gọi là *đường chuẩn* của parabol

$p = d(F; \Delta)$ được gọi là *tham số tiêu* của parabol.

2. **Phương trình chính tắc của parabol:**

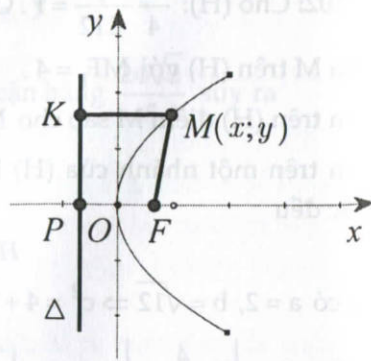
$$\text{Với } F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \text{ và } \Delta: x = -\frac{p}{2} (p > 0)$$

$$M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 2px \quad (3)$$

(3) được gọi là phương trình chính tắc của parabol

3. **Hình dạng và tính chất của parabol:**

+ Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$



Hình 3.5

+ Phương trình đường chuẩn: $\Delta: x = -\frac{p}{2}$

+ Gốc tọa độ O được gọi là đỉnh của parabol

+ Ox được gọi là trục đối xứng

+ $M(x_M; y_M)$ thuộc (P) thì: $MF = d(M; \Delta) = x_M + \frac{p}{2}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ CỦA PARABOL KHI BIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Từ phương trình chính tắc của parabol ta xác định các đại lượng p từ đó ta suy ra được các yếu tố cần tìm.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$

Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của (P).

Lời giải:

Từ phương trình của (P) có $2p = 4$ nên $p = 2$

Suy ra (P) có tiêu điểm là $F(1; 0)$ và đường chuẩn là $x + 1 = 0$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.103: Cho parabol (P) có phương trình $4y^2 = x$

Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của (P).

Hướng dẫn giải

$$2p = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$$

Suy ra (P) có tiêu điểm là $F\left(\frac{1}{16}; 0\right)$ và đường chuẩn là $x + \frac{1}{16} = 0$.

DẠNG TOÁN 2:

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA (E), (H), (P).

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Ta thiết lập phương trình từ giả thiết của bài toán để tìm p của parabol từ đó viết được phương trình chính tắc của nó.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Viết phương trình chính tắc của parabol (P)

a) (P) có tiêu điểm là $F(0;5)$

b) Khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ là $2\sqrt{2}$

Lời giải:

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$

a) Do tọa độ tiêu điểm $F(0;5)$ nên $\frac{p}{2} = 5 \Rightarrow p = 10$

Vậy phương trình của (P): $y^2 = 20x$

b) Ta có tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$

Khoảng cách từ F đến đường thẳng Δ bằng $2\sqrt{2}$ nên:

$$d(F; \Delta) = \frac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ suy ra } p = 16 \text{ hoặc } p = 32.$$

Vậy phương trình của (P): $y^2 = 32x$ hoặc $y^2 = 64x$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.104: Viết phương trình chính tắc của parabol (P) trong các trường hợp sau:

- Một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1
- (P) cắt đường thẳng $\Delta: 3x - y = 0$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$
- (P) cắt elip (E): $4x^2 + 6y^2 = 24$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 2$.

Hướng dẫn giải

a) Dễ thấy điểm $A(1;4) \in (P) \Rightarrow 16 = 2 \cdot p \cdot 1 \Rightarrow p = 8 \Rightarrow (P): y = 16x$

b) Ta thấy (P) luôn cắt đường thẳng Δ tại gốc tọa độ, giả sử $B \equiv O$ và A là giao điểm còn lại. Vì $A \in \Delta \Rightarrow A(a; 3a)$.

$$\text{Mặt khác } AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 9a^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Nếu } a = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = 2p \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow p = \frac{18}{\sqrt{5}} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{36}{\sqrt{5}}x$$

$$\text{Nếu } a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \text{ (loại).}$$

c) Do (E) và (P) có tính đối xứng và $AB = 2 \Rightarrow A(t;1), B(t;-1), t > 0$

$$A \in (E) \Rightarrow 4t^2 + 6 = 24 \Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$A \in (P) \Rightarrow 1 = 2p \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}x$$

DẠNG TOÁN 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM NẪM TRÊN PARABOL THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc parabol có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px$ ta làm như sau

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in (P) \Leftrightarrow y_M^2 = 2px_M$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 8x$ có tiêu điểm F

- Tìm trên (P) điểm M cách F một khoảng là 3
- Tìm điểm M trên (P) sao cho $S_{\Delta OMF} = 8$
- Tìm một điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho đoạn AB ngắn nhất

Lời giải:

a) Giả sử $M(x_M; y_M) \in (P)$ suy ra $y_M^2 = 8x_M$ (*)

Từ phương trình (P) có $p = 4$ nên $F(2;0)$

$$\text{Ta có } FM = \frac{p}{2} + x_M \text{ suy ra } x_M = 1 \text{ kết hợp (*) ta có } y_M = \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(1; 2\sqrt{2}), M_2(1; -2\sqrt{2})$

b) Ta có $M \in (P) \Rightarrow M\left(\frac{a^2}{8}; a\right)$ với $a \geq 0$

$$S_{\Delta OMF} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OF \cdot d(M; OF) = 8 \Leftrightarrow a = 8$$

Vậy điểm M cần tìm là $M(8;8)$

c) Với mọi điểm $A \in (P)$, $B \in \Delta$ ta luôn có $AB \geq d(A; \Delta)$

$$A \in (P) \Rightarrow A \left(\frac{a^2}{8}; a \right) \text{ với } a \geq 0, \text{ khi đó}$$

$$d(A; \Delta) = \frac{\left| 4 \cdot \frac{a^2}{8} - 3a + 5 \right|}{5} = \frac{(a-3)^2 + 1}{10} \geq \frac{1}{10}$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $A \left(\frac{9}{8}; 3 \right)$ và B là hình chiếu của A lên Δ

Đường thẳng đi qua A vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(3; 4)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $3\left(x - \frac{9}{8}\right) + 4(y - 3) = 0$ hay $24x + 32y - 123 = 0$

$$\text{Do đó tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ 24x + 32y - 123 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{209}{200} \\ y = \frac{153}{50} \end{cases}$$

Vậy $A \left(\frac{9}{8}; 3 \right)$, $B \left(\frac{209}{200}; \frac{153}{50} \right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.105: Cho $(P): y^2 = 16x$ và đường thẳng $\Delta: 4x - y - 8 = 0$

- Chứng minh rằng Δ cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B
- Tìm điểm M trên cung AB của (P) sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

Hướng dẫn giải

a) $A(1; -4), B(4; 8)$

b) $M \in \widehat{AB} \Rightarrow M \left(\frac{t^2}{16}; t \right), -4 \leq t \leq 8$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} d(M; \Delta) \cdot AB \Rightarrow S_{ABC} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow d(M; \Delta) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \left| \frac{t^2}{4} - t - 8 \right|$$

$$\text{lớn nhất với } -4 \leq t \leq 8 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M \left(\frac{1}{4}; 2 \right).$$

Bài 3.106: Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và điểm $I(0; 1)$. Tìm A, B trên (P) sao cho:

$$\overline{IA} = 4\overline{IB}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Vì } A, B \in (P) \Rightarrow A \left(\frac{a^2}{4}; a \right), B \left(\frac{b^2}{4}; b \right)$$

$$\overline{IA} \left(\frac{a^2}{4}; a-1 \right); \overline{IB} \left(\frac{b^2}{4}; b-1 \right) \Rightarrow \overline{IA} = 4\overline{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{4} = b^2 \\ a-1 = 4(b-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bài 3.107. Cho hình thoi $ABCD$ tâm I . Biết hai cạnh AB và AD lần lượt có phương trình là $2x - y - 1 = 0$ và $x - 2y - 5 = 0$, tâm I thuộc Parabol $y^2 = x$. Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi.

Hướng dẫn giải

$$\text{Tọa độ điểm } A \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -3)$$

Phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng $2x - y - 1 = 0$ và $x - 2y - 5 = 0$ là

$$\frac{2x - y - 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \pm \frac{x - 2y - 5}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

TH1: Đường chéo AC có phương trình là $x + y + 4 = 0$

$$\text{Tọa độ điểm } I \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ y^2 = x \end{cases}$$

(vô nghiệm)

TH2: Đường chéo AC có phương trình là $x - y - 2 = 0$

$$\text{Tọa độ điểm } I \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow I(1; -1) \text{ hoặc } I(4; 2)$$

• Với $I(1; -1)$ thì $B \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right), D \left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3} \right), C(3; 1)$

• Với $I(4; 2)$ thì $B \left(\frac{7}{3}; \frac{11}{3} \right), D \left(\frac{17}{3}; \frac{1}{3} \right), C(9; 7)$

§8. BA ĐƯỜNG CÔNIC

I. Đường chuẩn của elip và hypebol.

Không chỉ có parabol mới có đường chuẩn, elip và hypebol cũng có đường chuẩn được định nghĩa tương tự như sau

1. Đường chuẩn của elip.

a. **Định nghĩa:** Cho (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó đường thẳng $\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$; Đường thẳng $\Delta_2: x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c; 0)$.

b. **Tính chất:** Với mọi điểm M thuộc (E) ta có $\frac{MF_1}{d(M; \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M; \Delta_2)} = e (e < 1)$

2. Đường chuẩn của hypebol.

a. **Định nghĩa:** Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. các đường thẳng $\Delta_1: x + \frac{a}{e} = 0$ và $\Delta_2: x - \frac{a}{e} = 0$ gọi là các đường chuẩn của (H) lần lượt tương ứng với các tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$

b. **Tính chất:** Với mọi điểm M thuộc (E) ta có $\frac{MF_1}{d(M; \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M; \Delta_2)} = e (e > 1)$

II. Định nghĩa ba đường conic

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M; \Delta)}$ bằng một số dương e cho trước được gọi là

ba đường conic

Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ được gọi là đường chuẩn và e gọi là tâm sai của đường conic.

Chú ý: Elip là đường conic có tâm sai $e < 1$; parabol là đường conic có tâm sai $e = 1$; hypebol là đường conic có tâm sai $e > 1$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: NHẬN DẠNG CÔNIC VÀ XÁC ĐỊNH TIÊU ĐIỂM, ĐƯỜNG CHUẨN CỦA CÁC ĐƯỜNG CÔNIC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Để nhận dạng đường conic ta dựa vào tâm sai: đường conic có tâm sai $e < 1$ là elip; đường conic có tâm sai $e = 1$ là parabol; đường conic có tâm sai $e > 1$ là hypebol.

- Từ phương trình của đường conic ta xác định được dạng của nó từ đó xác định được tiêu điểm và đường chuẩn của nó.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường conic sau

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{10} = 1$

c) $y^2 = 18x$

Lời giải:

a) Để thấy đây là phương trình chính tắc của đường elip

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Do đó } c = 1, \text{ tâm sai } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Vậy ta có tiêu điểm là $F_1(-1; 0)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x + \frac{\sqrt{5}}{1} = 0$ hay $x + 5 = 0$ và tiêu điểm là $F_2(1; 0)$ tương ứng có đường

chuẩn có phương trình là $x - \frac{\sqrt{5}}{1} = 0$ hay $x - 5 = 0$.

b) Đây là phương trình chính tắc của đường hypebol

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 17$$

$$\text{Do đó } c = \sqrt{17}, \text{ tâm sai } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{7}}$$

Vậy ta có tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{17}; 0)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là

$$x + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{17}} = 0 \text{ hay } x + \frac{7}{\sqrt{17}} = 0 \text{ và tiêu điểm là } F_2(\sqrt{17}; 0)$$

Tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{17}} = 0$ hay $x - \frac{7}{\sqrt{17}} = 0$.

c) Đây là phương trình chính tắc của parabol

$$\text{Ta có } 2p = 18 \Rightarrow p = 9$$

Vậy tiêu điểm là $F\left(\frac{9}{2}; 0\right)$, đường chuẩn có phương trình là $x + \frac{9}{2} = 0$.

Ví dụ 2: Cho conic có tiêu điểm $F(-1; 1)$, đi qua điểm $M(1; 1)$ và đường chuẩn $\Delta: 3x + 4y - 5 = 0$. Conic này là elip, hypebol hay là parabol?

Lời giải:

$$\text{Ta có } MF = 2, d(M; \Delta) = \frac{|3 + 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Suy ra } \frac{MF}{d(M; \Delta)} = 5 > 1 \text{ suy ra đây là elip}$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.108: Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường conic sau

a) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{3} = 1$

c) $y^2 = 8x$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$ suy ra tiêu điểm là $F_1(-3; 0)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x + \frac{5}{3} = 0$ và tiêu điểm là $F_2(3; 0)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x - \frac{5}{3} = 0$.

b) Ta có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$ suy ra tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{7}; 0)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x + \frac{10}{\sqrt{7}} = 0$ và tiêu điểm là $F_2(\sqrt{7}; 0)$ tương ứng có đường chuẩn có phương trình là $x - \frac{10}{\sqrt{7}} = 0$.

c) Ta có $2p = 8 \Rightarrow p = 4$

Vậy tiêu điểm là $F(2; 0)$, đường chuẩn có phương trình là $x + 2 = 0$.

Bài 3.109. Cho conic có tiêu điểm $F(1; 1)$, đi qua điểm $M(1; 3)$ và đường chuẩn $\Delta: 3x - 4y - 5 = 0$. Conic này là elip, hypebol hay là parabol?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } MF = 2, d(M; \Delta) = \frac{|3 - 4 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{14}{5}$$

$$\text{Suy ra } \frac{MF}{d(M; \Delta)} = \frac{5}{7} < 1 \text{ suy ra đây là hypebol.}$$

Bài 3.110. Cho conic có tiêu điểm $F(1; 2)$, đi qua điểm $M(0; 1)$ và đường chuẩn $\Delta: x - y - 1 = 0$. Conic này là elip, hypebol hay là parabol?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } MF = \sqrt{2}, d(M; \Delta) = \frac{|0 - 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{MF}{d(M; \Delta)} = 1 \text{ suy ra đây là parabol.}$$

DẠNG TOÁN 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG CONIC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Dựa vào các dạng của đường conic mà giả thiết đã cho để viết phương trình
- Dựa vào định nghĩa của ba đường conic

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ và điểm $F(1; 0)$. Viết phương trình của đường conic nhận F làm tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau

a) Tâm sai $e = \sqrt{3}$

b) Tâm sai $e = \frac{1}{2}$

c) Tâm sai $e = 1$

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường conic cần tìm. Khi đó theo định nghĩa ta có

$$\frac{MF}{d(M; \Delta)} = e \Leftrightarrow MF = e \cdot d(M; \Delta) (*)$$

$$\text{Ta có } MF = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}, d(M; \Delta) = \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}$$

a) Tâm sai $e = \sqrt{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 + y^2) = 3(x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 6xy + 10x - 6y + 1 = 0$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm là $2x^2 + y^2 - 6xy + 10x - 6y + 1 = 0$

b) Tâm sai $e = \frac{1}{2}$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 3 = 0$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm là $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x + 2y + 3 = 0$.

c) Tâm sai $e = 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y \Leftrightarrow 2xy - 4x + 2y = 0$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm là $2xy - 4x + 2y = 0$.

Ví dụ 2: Cho điểm $A(0; \sqrt{3})$ và hai đường thẳng $\Delta: x - 2 = 0$, $\Delta': 3x - y = 0$

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn là Δ

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.

Lời giải:

a) Gọi phương trình chính tắc elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$

Vì $A(0; \sqrt{3})$ là một đỉnh của elip nên $b = \sqrt{3}$

elip có một đường chuẩn là Δ nên $\frac{a}{e} = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2c$ (*)

Ta lại có $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 3 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - 3$ thay vào (*) ta có:
 $c^2 = 2c - 3$

Vậy không tồn tại elip thỏa mãn đề bài.

b) Gọi phương trình chính tắc elip là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$

Hypebol có một đường chuẩn là Δ nên $\frac{a}{e} = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 2 \Leftrightarrow c = \frac{a^2}{2}$ (1)

Hypebol có một đường tiệm cận là Δ' nên $\frac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow b = 3a$ (2)

Mặt khác $b^2 = c^2 - a^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được

$$(3a)^2 = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 - a^2 \Leftrightarrow 10a^2 = \frac{a^4}{4} \Leftrightarrow a^2(40 - a^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 40$$

Suy ra $b^2 = 9a^2 = 360$

Vậy phương trình chính tắc hypebol cần tìm là $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{360} = 1$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.111. Cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 1 = 0$ và điểm $F(0;0)$. Viết phương trình của đường conic nhận F làm tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau

a) Tâm sai $e = \sqrt{2}$ b) Tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ c) Tâm sai $e = 1$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường conic cần tìm. Khi đó theo định nghĩa ta

có $\frac{MF}{d(M; \Delta)} = e \Leftrightarrow MF = e \cdot d(M; \Delta)$ (*)

Ta có $MF = \sqrt{x^2 + y^2}$, $d(M; \Delta) = \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}}$

a) Tâm sai $e = \sqrt{2}$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + y^2) = 2(x^2 + 4y^2 + 1 - 4xy + 2x - 4y)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 3y^2 + 8xy - 4x + 8y - 2 = 0$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm là $3x^2 - 3y^2 + 8xy - 4x + 8y - 2 = 0$

b) Tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow 15(x^2 + y^2) = x^2 + 4y^2 + 1 - 4xy + 2x - 4y$$

$$\Leftrightarrow 14x^2 + 11y^2 + 4xy - 2x + 4y - 1 = 0$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm là $14x^2 + 11y^2 + 4xy - 2x + 4y - 1 = 0$.

c) Tâm sai $e = 1$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + y^2) = x^2 + 4y^2 + 1 - 4xy + 2x - 4y$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 4y - 1 = 0$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm là $4x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 4y - 1 = 0$.

Bài 3.112. Cho điểm $A(3;0)$ và hai đường thẳng $\Delta: x - 3 = 0$, $\Delta': 2x - y = 0$

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn là Δ

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.

Hướng dẫn giải

a) Gọi phương trình chính tắc elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$

Vì $A(3;0)$ là một đỉnh của elip nên $a = 3$

elip có một đường chuẩn là Δ nên $\frac{a}{e} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{c} = 3 \Leftrightarrow c = 3$ (*)

Ta lại có $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 9 = 0$

Vậy không tồn tại elip thỏa mãn đề bài.

b) Gọi phương trình chính tắc hypebol là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$

Hypebol có một đường chuẩn là Δ nên $\frac{a}{e} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{c} = 3 \Leftrightarrow c = \frac{a^2}{3}$ (1)

Hypebol có một đường tiệm cận là Δ' nên $\frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow b = 2a$ (2)

Mặt khác $b^2 = c^2 - a^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được

$$(2a)^2 = \left(\frac{a^2}{3}\right)^2 - a^2 \Leftrightarrow 5a^2 = \frac{a^4}{9} \Leftrightarrow a^2(40 - a^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 40$$

Suy ra $b^2 = 4a^2 = 160$

Vậy phương trình chính tắc hypebol cần tìm là $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{160} = 1$.

DẠNG TOÁN 3: SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA CÁC ĐƯỜNG CÔNÍC VÀ VỚI CÁC ĐƯỜNG KHÁC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Cho hai đường cong $f(x; y) = a, g(x; y) = b$ khi đó

- Số giao điểm của hai đường cong trên chính là số nghiệm của hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} f(x; y) = a \\ g(x; y) = b \end{cases}$$

- Tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường cong là nghiệm của hệ $\begin{cases} f(x; y) = a \\ g(x; y) = b \end{cases}$

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta: 2x - y + m = 0$, elip (E): $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ và hypebol

$$(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$$

- Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt?
- Chứng minh rằng với mọi m thì Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (H)
- Tìm tọa độ giao điểm của (E) và (H). Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm đó.

Lời giải:

$$\text{a) Xét hệ phương trình } \begin{cases} 2x - y + m = 0 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + m \\ 9x^2 + 8mx + 2m^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Do đó Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $9x^2 + 8mx + 2m^2 - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{hay } \Delta' = 16m^2 - 9(2m^2 - 6) > 0 \Leftrightarrow -3\sqrt{3} < m < 3\sqrt{3}.$$

$$\text{b) Xét hệ phương trình } \begin{cases} 2x - y + m = 0 \\ \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + m \\ 4x^2 - 4mx - m^2 - 8 = 0 (*) \end{cases}$$

Do $ac = -4(m^2 + 8) < 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu suy ra

Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu nhau

Vậy Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (H)

$$\text{c) Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ: } \begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{Giải hệ (I) ta được } \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{22}{17}} \\ y = \pm 2\sqrt{\frac{10}{17}} \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ (I) nên thỏa mãn phương trình

$$27\left(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3}\right) + 4\left(\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8}\right) = 31 \text{ hay } x^2 + y^2 = \frac{62}{17}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (E) và (H) là

$$M_1\left(\sqrt{\frac{22}{17}}; 2\sqrt{\frac{10}{17}}\right), M_2\left(-\sqrt{\frac{22}{17}}; 2\sqrt{\frac{10}{17}}\right), M_3\left(\sqrt{\frac{22}{17}}; -2\sqrt{\frac{10}{17}}\right), M_4\left(-\sqrt{\frac{22}{17}}; -2\sqrt{\frac{10}{17}}\right)$$

và phương trình đường tròn đi qua các điểm có phương trình là $x^2 + y^2 = \frac{62}{17}$

Nhận xét: Để viết phương trình đường tròn qua giao điểm của (E)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (H) \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

Ta chọn α, β sao cho $\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{a'^2} = \frac{\alpha}{b^2} - \frac{\beta}{b'^2} = k > 0, \alpha + \beta > 0$ khi đó phương

trình đường tròn cần tìm là $x^2 + y^2 = \frac{\alpha + \beta}{k}$

Ví dụ 2: Cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $I(1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua I biết rằng đường thẳng đó cắt elip tại hai điểm A, B mà I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải:

Cách 1: Đường thẳng Δ đi qua I nhận $\vec{u}(a; b)$ làm vector chỉ phương có

$$\text{dạng } \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \end{cases} \text{ (với } a^2 + b^2 \neq 0)$$

$A, B \in \Delta$ suy ra tọa độ A, B có dạng $A = (1 + at_1; 2 + bt_1), B = (1 + at_2; 2 + bt_2)$.

I là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2y_I = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t_1 + t_2) = 0 \\ b(t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \quad (1) \text{ (do } a^2 + b^2 \neq 0)$$

$A, B \in (E)$ nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1 + at)^2}{16} + \frac{(2 + bt)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow (9a^2 + 16b^2)t^2 + 2(9a + 32b)t - 139 = 0$$

Theo định lý Viet ta có $t_1 + t_2 = 0 \Leftrightarrow 9a + 32b = 0$

Ta có thể chọn $b = -9$ và $a = 32$.

Vậy đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{32} = \frac{y-2}{-9}$ hay $9x + 32y - 73 = 0$

Cách 2: Vì I thuộc miền trong của elip (E) nên lấy tùy ý điểm $A(x; y) \in (E)$ thì đường thẳng IM luôn cắt (E) tại điểm thứ hai là $B(x'; y')$.

I là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2y_I = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Rightarrow M'(2 - x; 4 - y)$$

$$M, M' \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ \frac{(2-x)^2}{16} + \frac{(4-y)^2}{9} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \frac{4-4x}{16} + \frac{16-8y}{9} = 0 \text{ hay } 9x + 32y - 73 = 0 \quad (*)$$

Tọa độ điểm M, I thỏa mãn phương trình (*) nên đường thẳng cần tìm là $9x + 32y - 73 = 0$

Nhận xét: Bài toán tổng quát "Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ và điểm

$I(x_0; y_0)$ với $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$ (nghĩa là điểm I thuộc miền trong của elip). Viết

phương trình đường thẳng đi qua I, biết rằng đường thẳng đó cắt elip tại hai điểm M, M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM'".

Làm tương tự cách 2 ta có phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\frac{4x_0^2 - 4x_0x}{a^2} + \frac{4y_0^2 - 4y_0y}{b^2} = 0$$

Ví dụ 3: Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ và hai đường thẳng

$$\Delta: x + my = 0, \Delta': mx - y = 0$$

a) Tìm m để Δ và Δ' đều cắt (H) tại hai điểm phân biệt

b) Xác định m để diện tích tứ giác tạo bởi bốn giao điểm của Δ, Δ' và (H) đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Từ phương trình Δ thế $x = -my$ vào phương trình (H) ta được

$$\left(\frac{m^2}{4} - \frac{1}{9}\right)y^2 = 1 \quad (*)$$

Suy ra Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có

hai nghiệm phân biệt hay $\frac{m^2}{4} - \frac{1}{9} > 0 \Leftrightarrow m^2 > \frac{4}{9} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Tương tự từ phương trình Δ' thế $y = mx$ vào phương trình (H) ta được

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{9}\right)x^2 = 1$$

Suy ra Δ' cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\frac{1}{4} - \frac{m^2}{9} > 0 \Leftrightarrow m^2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Vậy Δ và Δ' đều cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$m \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$$

b. Với $m \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$ thì Δ và Δ' cắt (H) tại bốn điểm phân biệt (**)

Để dàng tìm được giao điểm Δ và (H) là

$$A\left(\frac{-6m}{\sqrt{9m^2-4}}; \frac{6}{\sqrt{9m^2-4}}\right); C\left(\frac{6m}{\sqrt{9m^2-4}}; \frac{-6}{\sqrt{9m^2-4}}\right) \text{ và giao điểm } \Delta' \text{ và (H)}$$

$$\text{là } B\left(\frac{-6}{\sqrt{9-4m^2}}; \frac{-6m}{\sqrt{9-4m^2}}\right); D\left(\frac{6}{\sqrt{9-4m^2}}; \frac{6m}{\sqrt{9-4m^2}}\right) \text{ A đối xứng với C và}$$

B đối xứng với D qua gốc tọa độ O. Mặt khác $\Delta \perp \Delta'$ do đó tứ giác ABCD là hình thoi.

$$\text{Suy ra } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{72(m^2+1)}{\sqrt{(9m^2-4)(9-4m^2)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$S_{ABCD} = \frac{72(m^2+1)}{\sqrt{(9m^2-4)(9-4m^2)}} \geq \frac{144 \cdot (m^2+1)}{(9m^2-4) + (9-4m^2)} = \frac{144}{5}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $9m^2-4=9-4m^2 \Leftrightarrow m=\pm 1$ (thỏa mãn (**))

Vậy $m=\pm 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2=8x$. Đường thẳng Δ không trùng với trục Ox đi qua tiêu điểm F của (P) sao cho góc hợp bởi hai tia Fx và Ft là tia của Δ nằm phía trên trục hoành một góc bằng α ($\alpha \neq 90^\circ$). Chứng minh rằng Δ Cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N và tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi α thay đổi.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có F(2; 0), đường thẳng Δ có hệ số góc $k=\tan \alpha$

Suy ra $\Delta: y=(x-2) \cdot \tan \alpha$. Xét hệ phương trình $\begin{cases} y=(x-2) \tan \alpha \\ y^2=8x \end{cases}$ (*)

Suy ra $\tan \alpha \cdot y^2 - 8y - 16 \tan \alpha = 0$ (**)

$\Delta' = 16 + 16 \tan^2 \alpha > 0$ do đó phương trình (**) luôn có hai nghiệm phân biệt, hệ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt điều này chứng tỏ rằng Δ Cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Gọi tọa độ hai giao điểm đó là $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$; I($x_I; y_I$) là trung điểm của MN

Theo định lý Viét ta có: $y_M + y_N = \frac{8}{\tan \alpha} > 0 \Rightarrow y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{4}{\tan \alpha}$.

Mặt khác từ (*) ta có $y_M + y_N = (x_M + x_N - 4) \tan \alpha \Rightarrow x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{4}{\tan^2 \alpha} + 2$

Suy ra $x_I = 4 \cdot \left(\frac{y_I}{4}\right)^2 + 2$ hay $y_I^2 = 4x_I + 8$

Vậy tập hợp điểm I là đường cong có phương trình: $y^2 = px + \frac{p^2}{2}$. (Cũng gọi là Parapol)

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.113: Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

- Xác định m để đường thẳng d: $y=x+m$ và (E) có điểm chung
- Viết phương trình đường thẳng đi qua M(1;1) và cắt (E) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ d: y = x + m \end{cases} \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow 4x^2 + 9(x+m)^2 = 36 \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{13} \leq m \leq \sqrt{13}$$

- Vì I thuộc miền trong của elip (E) nên lấy tùy ý điểm $A(x; y) \in (E)$ thì đường thẳng IM luôn cắt (E) tại điểm thứ hai là $B(x'; y')$.

I là trung điểm điểm AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2y_I = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Rightarrow M'(2-x; 2-y)$$

$$M, M' \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{(2-x)^2}{9} + \frac{(2-y)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Suy ra $\frac{4-4x}{9} + \frac{4-4y}{4} = 0$ hay $4x+9y-13=0$ (*)

Tọa độ điểm M, I thỏa mãn phương trình (*) nên đường thẳng cần tìm là $4x+9y-13=0$

Bài 3.114: Cho (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $\Delta: 3x+4y-12=0$

- a) Chứng minh rằng Δ cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB
b) Tìm tọa độ C thuộc (E) sao cho ΔABC cân tại A (biết hoành độ A bé hơn hoành độ B)

Hướng dẫn giải

a) $A(0;3), B(4;0) \Rightarrow AB=5$

b) Gọi $C(a;b) \Rightarrow \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9} = 1; \Delta ABC$ cân tại A

$\Leftrightarrow AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow 25 = a^2 + (b-3)^2 = 25$

Từ đó ta tìm được hai điểm $C_1(-4;0), C_2(4;0)$

Bài 3.115: Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hai đường thẳng

$\Delta_1: my-nx=0, \Delta_2: nx+my=0, m^2+n^2 \neq 0$

- a) Xác định giao điểm M, N của Δ_1 với (E) và P, Q của Δ_2 với (E)
b) Tính theo m, n diện tích tứ giác MPNQ
c) Tìm điều kiện m, n để diện tích tứ giác MPNQ nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta_1: \begin{cases} x=nt \\ y=mt \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x=-mt \\ y=nt \end{cases}$ từ đó suy ra

$M\left(\frac{6n}{\sqrt{6m^2+4n^2}}; \frac{6m}{\sqrt{6m^2+4n^2}}\right), N\left(\frac{-6n}{\sqrt{6m^2+4n^2}}; \frac{-6m}{\sqrt{6m^2+4n^2}}\right)$

$P\left(\frac{-6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}}; \frac{6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right), Q\left(\frac{6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}}; \frac{-6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right)$

- b) Ta có $MN \perp PQ$ tại trung điểm O của mỗi đường nên tứ giác MPNQ là

hình thoi do đó $S = \frac{1}{2}MN \cdot PQ = \frac{72(m^2+n^2)}{\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)}}$

c) $\text{Min} S = \frac{144}{13}$ khi $m = \pm n$

Bài 3.116: Cho (H): $x^2 - 4y^2 = 20$ và đường thẳng $\Delta: x-3y=0$

- a) Chứng minh rằng Δ cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tính độ dài của đoạn AB.
b) Tìm tọa độ điểm C thuộc (H) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.
c) Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M(0;2)$ sao cho d cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $3\overline{MA} - 5\overline{MB} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

a) $A(6;2), B(-6;-2) \Rightarrow AB=4\sqrt{10}$

b) $S_{ABC} = \frac{1}{2}d(C;\Delta) \cdot AB \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2} \frac{|x_C - 3y_C|}{\sqrt{1+9}} \cdot 4\sqrt{10} \Leftrightarrow |x_C - 3y_C| = 2$

$C \in (H) \Rightarrow x_C^2 - 4y_C^2 = 20$

Từ đó ta có bốn điểm thỏa mãn có tọa độ là

$\left(-\frac{8+6\sqrt{29}}{5}; -\frac{6+2\sqrt{29}}{5}\right); \left(\frac{8-6\sqrt{29}}{5}; \frac{6-2\sqrt{29}}{5}\right);$

$\left(\frac{-8+6\sqrt{29}}{5}; \frac{-6+2\sqrt{29}}{5}\right); \left(\frac{8+6\sqrt{29}}{5}; \frac{6+2\sqrt{29}}{5}\right)$

c) Giả sử $A(a;b)$, vì $3\overline{MA} - 5\overline{MB} = \vec{0} \Rightarrow B\left(\frac{3a}{5}; \frac{3b+4}{5}\right)$

Mặt khác $A, B \in (H) \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4b^2 = 20 \\ \left(\frac{3a}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{3b+4}{5}\right)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 2\sqrt{21} \\ b = -4 \end{cases}$ từ đó suy ra

ptdt cần tìm.

Bài 3.117: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho Hypebol (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ và

đường thẳng $d: x+3y+2007=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết rằng Δ vuông góc với d và Δ cắt (H) tại hai điểm M, N thỏa mãn $MN = 2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

$\Delta: 3x-y+m=0$. Tọa độ giao điểm Δ với (H) là nghiệm hệ

$\begin{cases} 3x-y+m=0 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{(3x+m)^2}{12} = 1 \Leftrightarrow 6x^2 + 6mx + m^2 + 12 = 0 \quad (1)$

Δ cắt (H) tại 2 điểm M; N phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm $x_1 \neq x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 3m^2 - 72 > 0 \Leftrightarrow |m| > 2\sqrt{6}$$

Theo Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = \frac{m^2 + 12}{6} \end{cases}$$

Ta có: $M(x_1; 3x_1 + m); N(x_2; 3x_2 + m)$

$$MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 9(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{10(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{\frac{10(3m^2 - 72)}{36}} = 2\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3m^2 - 72}{36} = 4 \Leftrightarrow m = \pm 6\sqrt{2} \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy $m = \pm 6\sqrt{2}$

Bài 3.118: Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một đường thẳng Δ cắt (H) tại M, N cắt hai tiệm cận tại P, Q. Chứng minh $PM = NQ$.

Hướng dẫn giải

Giả sử (Δ) có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, thì tọa độ M, N là nghiệm

của hệ:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \Rightarrow \frac{(x_0 + at)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + bt)^2}{b^2} = 1$$

Giả sử phương trình trên có nghiệm t_1, t_2 thì:

$$x_M = x_0 + at_1, y_M = y_0 + bt_1, x_N = x_0 + at_2, y_N = y_0 + bt_2$$

Tương tự giao điểm P, Q có:

$$x_P = x_0 + at_3, y_P = y_0 + bt_3, x_Q = x_0 + at_4, y_Q = y_0 + bt_4$$

$$\Rightarrow \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{t_3 + t_4}{2} \Rightarrow \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{y_P + y_Q}{2}$$

Vậy trung điểm MN và PQ trùng nhau. Hay $PM = NQ$.

Bài 3.119: Trên mặt phẳng Oxy, cho (E) là một elip di động nhưng luôn nhận hai tiêu điểm của hypebol (H): $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ làm các tiêu điểm và luôn có điểm chung với đường thẳng $\Delta: x - y + 6 = 0$. Tìm giá trị bé nhất của độ dài trục lớn của elip (E).

Hướng dẫn giải

(E) nhận hai tiêu điểm của hypebol (H) làm các tiêu điểm nên chúng có cùng tiêu cự do đó phương trình (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 9} = 1$

Hơn nữa, đề (E) và đường thẳng đã cho luôn có điểm chung thì hệ sau phải

có nghiệm:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 9} = 1 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

Do đó phương trình $(2a^2 - 9)x^2 + 12a^2x + 45a^2 - a^4 = 0$ có nghiệm

$$\Delta' = 36a^4 - (2a^2 - 9)(45a^2 - a^4) = 2a^6 - 63a^4 + 405a^2 = a^2(a^2 - 9)(2a^2 - 45)$$

$$\text{Cần có } \Delta \geq 0 \Rightarrow 2a^2 - 45 \geq 0 \Rightarrow a \geq 3\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của trục lớn là $2a = 3\sqrt{10}$

Bài 3.120: Cho (P): $y^2 = 12x$ và đường thẳng $d: mx - y - 3m = 0$ ($m \neq 0$)

- Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$, d luôn đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B
- Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn của (P).

Hướng dẫn giải

a) (P): $y^2 = 12x \Rightarrow p = 6 \Rightarrow F(3; 0)$

Xét điểm $K(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà d luôn đi qua $\forall m \neq 0$

Lúc đó pt: $mx_0 - y_0 - 3m = 0 \Leftrightarrow m(x_0 - 3) - y_0 = 0$ có nghiệm $\forall m \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(3; 0) \equiv F$$

Vậy d luôn đi qua tiêu điểm F của parabol đã cho $\forall m \neq 0$

Tọa độ giao điểm (P) và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y^2 = 12x \\ mx - y - 3m = 0 \end{cases} \Rightarrow m^2x^2 - (6m^2 + 12)x + 9m^2 = 0$$

$\Delta' = 36m^2 + 36 > 0$ suy ra (P) cắt d tại hai điểm phân biệt.

b) Ta có $x_A + x_B = \frac{6m^2 + 12}{m^2}$, $x_A x_B = 9 \Rightarrow y_A + y_B = \frac{12}{m^2}$, $y_A y_B = -36$

Từ đó

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B + x_A)^2 - 4x_A x_B + (y_B + y_A)^2 - 4y_A y_B}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{12m^2 + 12}{m^2}$$

Suy ra trung điểm I của AB có $x_I = \frac{3m^2 + 6}{m^2}$, $y_I = \frac{6 - 3m^2}{2m}$

Đường chuẩn của (P) là $\Delta: x + 3 = 0 \Rightarrow d(I; \Delta) = \left| \frac{3m^2 + 6}{m^2} + 3 \right| = \frac{6m^2 + 6}{m^2}$

Do đó $AB = 2d(I; \Delta) \Rightarrow đpcm$.

Bài 3.121: Cho (P): $y^2 = 2px$ có tiêu điểm F. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2 qua F và vuông góc với nhau. Δ_1 cắt (P) tại M, N; Δ_2 cắt (P) tại P, Q. Chứng minh rằng $S_{MNPQ} \geq 8p^2$

Hướng dẫn giải

Đặt $(\vec{i}; \vec{FM}) = \alpha \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{2p^2}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \geq \frac{8p^2}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2} = 8p^2$

Bài 3.122: Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P): $y = x^2 - 2x$ và elip (E): $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Chứng minh rằng (P) cắt (E) tại bốn điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Viết phương trình đường tròn đó.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm (P) và (E) là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases}$ dễ thấy hệ có

bốn nghiệm phân biệt.

Từ hệ suy ra $\frac{8y}{9} + 1 = 8 \cdot \frac{x^2 - 2x}{9} + \frac{x^2}{9} + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{16}{9}x - \frac{8}{9}y - 1 = 0 (*)$

Suy ra phương trình (*) là phương trình đường tròn đi qua giao điểm của (P) và (E).

Bài 3.123: Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm $M(3; 2)$. Đường thẳng Δ đi qua M cắt

(E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 3MB$, xác định tọa độ các điểm A, B.

Hướng dẫn giải

Do $MA = 3MB$ nên $\overline{MA} = \pm 3\overline{MB}$

+) TH1: $\overline{MA} = 3\overline{MB}$

Khi đó ta có $\begin{cases} 3 - x_A = 3(3 - x_B) \\ 2 - y_A = 3(2 - y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + 6}{3} \\ y_B = \frac{y_A + 4}{3} \end{cases}$

Do $A, B \in (E)$ nên

$$\begin{cases} \frac{x_A^2}{9} + \frac{y_A^2}{4} = 1 \\ \frac{1}{9} \left(\frac{(x_A + 6)^2}{9} + \frac{(y_A + 4)^2}{4} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_A = \sqrt{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_A = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_A = -\sqrt{2} \end{cases}$$

+) TH2: $\overline{MA} = -3\overline{MB}$. Khi đó ta có $\begin{cases} 3 - x_A = -3(3 - x_B) \\ 2 - y_A = -3(2 - y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{12 - x_A}{3} \\ y_B = \frac{8 - y_A}{3} \end{cases}$

Do $A, B \in (E)$ nên $\begin{cases} \frac{x_A^2}{9} + \frac{y_A^2}{4} = 1 \\ \frac{1}{9} \left(\frac{(12 - x_A)^2}{9} + \frac{(8 - y_A)^2}{4} \right) = 1 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy $A\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right), B\left(\frac{4 - \sqrt{2}}{2}; \frac{4 + \sqrt{2}}{3}\right)$ hoặc $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right), B\left(\frac{4 + \sqrt{2}}{2}; \frac{4 - \sqrt{2}}{3}\right)$

Bài 3.124: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x + y + 3 = 0$ và elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.

Hướng dẫn giải

+) $\Delta \perp d \Rightarrow$ pt Δ có dạng $x - 2y + m = 0$.

+) Tọa độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y + m = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - m \\ 8y^2 - 4my + m^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

d cắt (E) tại hai điểm A, B $\Leftrightarrow$ hệ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 32 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}. (*)$$

+) Gọi $A(2y_1 - m; y_1)$, $B(2y_2 - m; y_2)$ trong đó y_1, y_2 là nghiệm của (1)

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = \frac{m}{2}, y_1 y_2 = \frac{m^2 - 4}{8}.$$

$$\Rightarrow AB^2 = 5(y_2 - y_1)^2 = 5[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2] = \frac{5(8 - m^2)}{4}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{8 - m^2}}{2}.$$

+) Đường cao $OH = d(O, \Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = \frac{\sqrt{m^2(8 - m^2)}}{4} = 1$

$$\Leftrightarrow m^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 2 \text{ (thỏa mãn (*))}.$$

Suy ra phương trình $\Delta: x - 2y + 2 = 0$ hoặc $x - 2y - 2 = 0$.

DẠNG TOÁN 4: CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH HÌNH VỀ BA ĐƯỜNG CÔNIC.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dựa vào phương trình chính tắc của ba đường conic và giả thiết để thiết lập và chứng minh một số các tính chất của ba đường conic.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và hai điểm M, N thuộc

(E) sao cho OM vuông góc với ON. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

b) Đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải.

a)

+ Để thấy một trong hai điểm trùng với bốn đỉnh của (E) thì đẳng thức hiển nhiên đúng

+ Nếu cả hai điểm không trùng với các đỉnh của (E):

Gọi $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$, $k(k \neq 0)$ là hệ số góc của đường thẳng OM thì

hệ số góc của ON là $-\frac{1}{k}$ (vì OM vuông góc với ON).

Do $M, N \in (E)$ nên $\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$ (1), $\frac{x_N^2}{a^2} + \frac{y_N^2}{b^2} = 1$ (2)

Đường thẳng OM có phương trình là $y = kx$ suy ra $y_M = kx_M$ (3)

Đường thẳng ON có phương trình là $y = -\frac{1}{k}x$ suy ra $y_N = -\frac{1}{k}x_N$ (4)

Thay (3) vào (1) suy ra

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{k^2 x_M^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_M^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) = 1 \Leftrightarrow x_M^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 k^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow y_M^2 = k^2 x_M^2 = \frac{k^2 a^2 b^2}{a^2 k^2 + b^2}$$

Do đó $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = \frac{a^2 b^2 (k^2 + 1)}{a^2 k^2 + b^2}$

Tương tự thay (4) vào (2) suy ra

$$\frac{x_N^2}{a^2} + \frac{\frac{1}{k^2} x_N^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_N^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{k^2 b^2} \right) = 1 \Leftrightarrow x_N^2 = \frac{a^2 k^2 b^2}{a^2 + k^2 b^2}$$

$$\Rightarrow y_N^2 = \frac{1}{k^2} x_N^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + k^2 b^2}$$

Do đó $ON^2 = x_N^2 + y_N^2 = \frac{a^2 b^2 (k^2 + 1)}{a^2 + k^2 b^2}$

Suy ra

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{b^2 + k^2 a^2}{a^2 b^2 (k^2 + 1)} + \frac{a^2 + k^2 b^2}{a^2 b^2 (k^2 + 1)} = \frac{(a^2 + b^2)(k^2 + 1)}{a^2 b^2 (k^2 + 1)} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Vậy $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

b) Gọi H là hình chiếu của O lên đường thẳng MN khi đó OH là đường cao của tam giác vuông MON. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định tâm O bán kính $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Ví dụ 2. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có các tiêu điểm F_1, F_2 . Lấy M là điểm bất kì trên (H). Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là hằng số.

Lời giải.

Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là:

$$\Delta_1: y = \frac{b}{a}x \text{ hay } bx - ay = 0; \Delta_2: y = -\frac{b}{a}x \text{ hay } bx + ay = 0$$

Giả sử $M(x_M; y_M)$ khi đó theo công thức khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng ta có

$$d(M; \Delta_1) = \frac{|bx_M - ay_M|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad d(M; \Delta_2) = \frac{|bx_M + ay_M|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Suy ra } d(M; \Delta_1)d(M; \Delta_2) = \frac{|bx_M - ay_M|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx_M + ay_M|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2x_M^2 - a^2y_M^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Mặt khác } M \text{ thuộc (H) nên: } \frac{x_M^2}{a^2} - \frac{y_M^2}{b^2} = 1 \text{ hay } b^2x_M^2 - a^2y_M^2 = a^2b^2$$

$$\text{Do đó } d(M; \Delta_1)d(M; \Delta_2) = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \text{ là hằng số}$$

Ví dụ 3. Cho parabol (P): $y^2 = 2ax$. Đường thẳng Δ bất kỳ đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k (k \neq 0)$ cắt (P) tại M và N. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ M và N đến trục Ox là hằng số.

Lời giải

Tiêu điểm $F(a; 0)$. Vì Δ đi qua tiêu điểm F có hệ số góc $k \neq 0$ nên có phương

$$\text{trình: } \Delta: y = k\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

Hoàn độ giao điểm của Δ và (P) là nghiệm của phương trình:

$$k^2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 2ax \Leftrightarrow 4k^2x^2 - 4(2a + k^2a)x + k^2a^2 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = 4(2a + k^2a)^2 - 4k^4a^2 = 16a^2(1 + k^2) > 0$$

$$\text{Theo định lý Viet có } x_M \cdot x_N = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Mặt khác ta có } d(M; Ox) = |y_M|; \quad d(N; Ox) = |y_N|$$

$$\text{Suy ra } d(M; Ox) \cdot d(N; Ox) = |y_M \cdot y_N| = \sqrt{4a^2 |x_M \cdot x_N|} = a^2$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.125: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ với các tiêu điểm F_1, F_2 và

A_1, A_2 là các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tùy ý trên (E) có hình chiếu trên Ox là H. Chứng minh rằng

a) $OM^2 + MF_1 \cdot MF_2 = a^2 + b^2$

b) $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(OM^2 - b^2)$

c) $a^2 HM^2 + b^2 \overline{HA_1} \cdot \overline{HA_2} = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Sử dụng các kết quả sau } M(x_M; y_M) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1,$$

$$OM^2 = x_M^2 + y_M^2, \quad MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M, \quad MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M$$

Bài 3.126: Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ với các tiêu điểm F_1, F_2 . M là

điểm chạy trên (E). Phân giác góc $\widehat{F_1MF_2}$ cắt F_1F_2 tại N, H là hình chiếu của N trên MF_1 . Chứng minh rằng MH không đổi.

Hướng dẫn giải

Theo định lý Thales ta có $\frac{MH}{MK} = \frac{MN}{MI}$, ta chứng minh được

$$\frac{MN}{MI} = \frac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{MF_1 + MF_2}, \quad MK = \frac{MF_1 + MF_2 - F_1F_2}{2}$$

$$\text{Suy ra } MH = \frac{b^2}{a^2}$$

Bài 3.127: Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với các tiêu điểm F_1, F_2 và A_1, A_2 là

các đỉnh trên trục lớn của (E). M là điểm tùy ý trên (H) có hình chiếu trên Ox là H. Chứng minh rằng

a) $OM^2 - MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - b^2$

b) $(MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2)$

c) $a^2 HM^2 = b^2 \overline{HA_1} \cdot \overline{HA_2}$

Hướng dẫn giải

$$M(x; y) \in (H) \Rightarrow MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right|, \quad MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right|$$

$$a) OM^2 - MF_1 \cdot MF_2 = x^2 + y^2 - \left| a^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 \right|$$

$$= x^2 + y^2 - \left| a^2 - c^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right) \right| = a^2 - b^2$$

$$b) (MF_1 + MF_2)^2 = (MF_1 - MF_2)^2 + 4MF_1 \cdot MF_2$$

$$= 4a^2 + 4 \left| a^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 \right| = 4(a^2 + b^2) + \frac{4c^2}{b^2} y^2$$

$$4(OM^2 + b^2) = 4(x^2 + y^2 + b^2)$$

$$= 4a^2 + 4b^2 + 4y^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) = 4(a^2 + b^2) + \frac{4c^2}{b^2} y^2$$

Suy ra đpcm.

$$c) \text{ Ta có } a^2 HM^2 = a^2 \cdot y^2,$$

$$b^2 \overline{HA_1} \cdot \overline{HA_2} = b^2 (-x-a)(-x+a) = -a^2 b^2 + a^2 b^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right) = a^2 \cdot y^2$$

$$\text{Suy ra } a^2 HM^2 = b^2 \overline{HA_1} \cdot \overline{HA_2}$$

Bài 3.128: Cho (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với các tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ và đường

tròn (C): $x^2 + y^2 = a^2$, Δ là một trong hai tiệm cận của (H), Δ cắt (C) tại

$E_1, E_2 (x_{E_1} < 0; x_{E_2} > 0)$. Một đường thẳng song song với trục tung cắt (H)

tại M và cắt Δ tại N. Chứng minh rằng $NE_1 = MF_1$; $NE_2 = MF_2$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $\Delta: y = -\frac{b}{a}x$, $x_N < 0$. Xét $A_1(-a;0)$, $L \in \Delta: LA_1 // Oy$.

Ta có $L(-a;b) \Rightarrow OL = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Đặt $\alpha = (\vec{i}; \overline{ON}) = (\vec{i}; \overline{OL})$

$$\Rightarrow NE_1 = ON - OE_1 = \frac{x_N}{\cos \alpha} - a = \frac{x_M}{\cos(\vec{i}; \overline{OL})} - a = \frac{x_M}{\frac{x_{A_1}}{OL}} - a = -a - \frac{c}{a} x_M = MF_1$$

Tương tự $NE_2 = MF_2 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 3.129: Cho parabol (P): $y^2 = 2px (p > 0)$ và đường thẳng Δ đi qua tiêu

điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm M và N. Gọi $\alpha = (\vec{i}; \overline{FM}) (0 < \alpha < \pi)$

a) Tính FM, FN theo p và α

b) Chứng minh rằng khi Δ quay quanh F thì $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ không đổi

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích FM.FN khi α thay đổi

Hướng dẫn giải

a) Gọi H, M' lần lượt là hình chiếu của M lên

Ox và đường chuẩn Δ của (P), còn I là

giao điểm của Ox và d.

Ta có $MF = MM' = IH$.

$$\overline{IH} = \overline{IF} + \overline{FH} \Rightarrow IH = p + \overline{PM} \cdot \vec{i} = p + MF \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow MF = \frac{p}{1 - \cos \alpha}$$

$$\text{Do } (\overline{FN}; \vec{i}) = 180^\circ - \alpha.$$

$$\text{Tương tự ta có } NF = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$$

$$b) \frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2}{p} \text{ không đổi}$$

$$c) FM \cdot FN = \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} \geq p^2 \Rightarrow \max(FM \cdot FN) = p^2 \Leftrightarrow \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \Delta \perp Ox$$

Bài 3.130: Cho parabol (P) có đường chuẩn Δ và tiêu điểm F. Gọi M, N là hai điểm trên (P) sao cho đường tròn đường kính MN tiếp xúc với Δ . Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua F

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm MN còn M', I', N'

theo thứ tự là hình chiếu của M, I, N

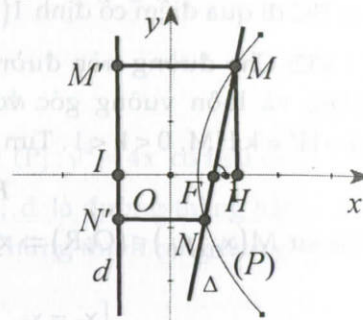
lên Δ . Khi đó

$$II' = \frac{1}{2}(MM' + NN') = \frac{1}{2}(MF + NF).$$

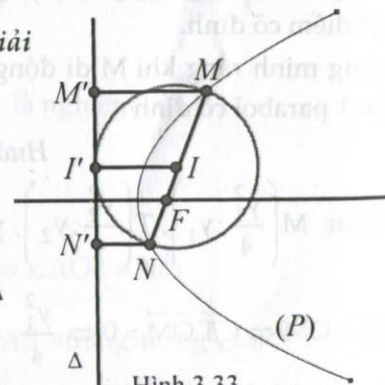
Vì đường tròn đường kính MN tiếp xúc Δ

$$\text{nên } II' = \frac{1}{2}MN$$

Do đó $MN = MF + NF \Rightarrow M, F, N$ thẳng hàng.



Hình 3.32



Hình 3.33

Bài 3.131: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 16x$ và điểm A(1;4). hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Viết PT đường thẳng BC

$\Rightarrow$ BC đi qua điểm cố định I(17;-4).

Bài 3.132: Cho đường tròn đường kính AB tâm O. Một dây cung MN chuyển động và luôn vuông góc với AB tại H, I là điểm thuộc đoạn HM sao cho $HI = k \cdot HM$, $0 < k < 1$. Tìm tập hợp điểm I.

Hướng dẫn giải

Giả sử $M(x_0; y_0) \in (O; R) \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = R^2$.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} x_I = x_0 \\ y_I = ky_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_I \\ y_0 = \frac{k}{y_I} \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường tròn ta được:

$$x_I^2 + \frac{y_I^2}{k^2} = R^2 \Leftrightarrow \frac{x_I^2}{R^2} + \frac{y_I^2}{\left(\frac{k}{R}\right)^2} = 1. \text{ Vậy tập hợp I là một (E).}$$

Bài 3.133: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y^2 = 4x$. M là một điểm di động trên (P). $M \neq O$, T là một điểm trên (P) sao cho $T \neq O$, OT vuông góc với OM.

a. Chứng minh rằng khi M di động trên (P) thì đường thẳng MT luôn đi qua một điểm cố định.

b. Chứng minh rằng khi M di động trên (P) thì trung điểm I của MT chạy trên 1 parabol cố định.

Hướng dẫn giải

a) Giả sử $M\left(\frac{y_1^2}{4}; y_1\right), T\left(\frac{y_2^2}{4}; y_2\right), y_1 \cdot y_2 \neq 0, y_1 \neq y_2$.

$$OT \perp OM \Leftrightarrow \overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 y_2 + 16 = 0 \quad (1)$$

Phương trình đường thẳng

$$MT: \frac{x - \frac{y_1^2}{4}}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow 4(x - 4) - (y_1 + y_2)y = 0$$

Nên đường thẳng MT luôn đi qua điểm cố định J(4;0)

b. Gọi I($x_0; y_0$) là trung điểm MT thì $x_0 = \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2), y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$

Từ đó suy ra $y_0^2 = 2x_0 - 8$

Do đó I chạy trên parabol (P): $y_0^2 = 2x_0 - 8$ cố định.

Bài 3.134: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y^2 = 4x$ có tiêu điểm F. Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{FM} = -3\overrightarrow{FO}$; d là đường thẳng bất kì đi qua M, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng tam giác OAB là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải

+) (P): $y^2 = 4x$ có p = 2 $\Rightarrow$ tiêu điểm F(1; 0) $\Rightarrow$ M(4; 0).

+) Nếu $d \perp Ox \Rightarrow$ pt d: $x = 4$. Từ hệ $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; 4) \\ B(4; -4) \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 16 - 16 = 0 \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ.$$

+) Nếu $d \perp Ox \Rightarrow$ pt d: $y = k(x - 4)$.

$$\text{Tọa độ A, B là nghiệm của hệ } \begin{cases} y = kx - 4k \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ ky^2 - 4y - 16k = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Điều kiện d cắt (P) tại hai điểm phân biệt là pt (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k \neq 0$.

Giả sử $A\left(\frac{y_1^2}{4}; y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}; y_2\right)$ trong đó y_1, y_2 là nghiệm của (1)

$$\Rightarrow y_1 y_2 = -16.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(\frac{y_1 y_2}{4}\right)^2 + y_1 y_2 = (-4)^2 - 16 = 0 \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ.$$

Suy ra OA vuông góc với OB hay tam giác OAB vuông trong mọi trường hợp. Ta có đpcm.

Chuyên đề III:

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VÀO CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG

Phương pháp chung

Để giải một bài toán tổng hợp bằng phương pháp tọa độ ta thường thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Thiết lập trục tọa độ thích hợp, chuyển giả thiết và kết luận của bài toán sang ngôn ngữ của tọa độ, chuyển bài toán tổng hợp về bài toán tọa độ.

Bước 2: Sử dụng các kiến thức hình học giải tích trong mặt phẳng tọa độ để giải quyết bài toán đó.

Bước 3: Chuyển kết quả bài toán tọa độ sang kết quả bài toán tổng hợp. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, chẳng hạn trong bài toán tìm tập hợp điểm (quỹ tích) ta không cần nêu dạng hình học của quỹ tích này mà chỉ nêu phương trình cụ thể hoặc cách xác định của nó là đủ.

Việc thiết lập hệ trục tọa độ thích hợp là bước làm quan trọng, nó được lựa chọn trên các dạng thường gặp sau

I. BÀI TOÁN CÓ GIẢ THIẾT LÀ HAI ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

1. PHƯƠNG PHÁP:

Ta thường thiết lập hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm A, B và A, B thuộc trục hoành.

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho đoạn $AB = a, a > 0$ cố định. Tìm tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn $MA^2 - MB^2 = \frac{a^2}{2}$.

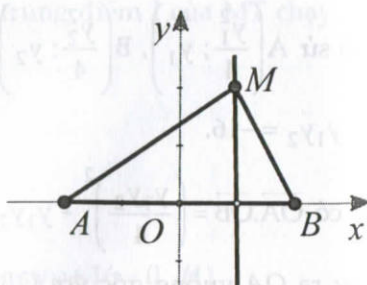
Lời giải (hình 3.6)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với $A, B \in Ox$ và đối xứng qua Oy (như hình vẽ).

Khi đó: $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right), B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

Điểm $M(x, y)$ thỏa mãn $MA^2 - MB^2 = \frac{a^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 \right] - \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 \right] = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$



Hình 3.6

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng $x = \frac{a}{4}$, tức là đường thẳng vuông góc

với đoạn AB tại điểm nằm trên đoạn AB và cách B một khoảng là $\frac{a}{4}$.

Ví dụ 2: Cho đoạn thẳng AB cố định và đường thẳng d cố định song song với AB. Điểm C di động trên d. Tìm quỹ tích trực tâm tam giác ABC.

Lời giải (hình 3.7)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với $A, B \in Ox$ và đối xứng qua Oy

Không mất tính tổng quát giả sử $A(-a; 0), B(a; 0), d: y = b$ với $b \neq 0$ suy ra $C(m; b)$ trong đó b là hằng số, m thay đổi.

Đường cao CH: $x = m$,

$$AH: (m-1)x + y + m - 1 = 0$$

Tọa độ trực tâm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (m-1)x + ay + m - 1 = 0 \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = \frac{1-m^2}{a} \Rightarrow y = \frac{1-x^2}{a} \end{cases}$$

Hình 3.7

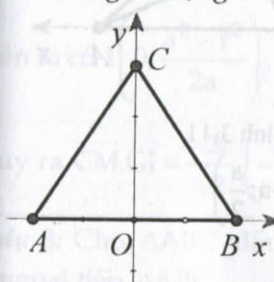
Vậy quỹ tích của H là (P): $y = \frac{1-x^2}{a}$

Chú ý: Trong trường hợp d không song song với AB, quỹ tích vẫn là một đường parabol nhưng có phương trình không sơ cấp.

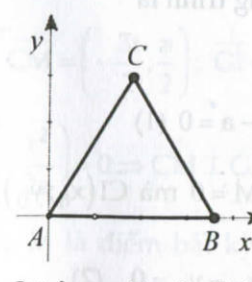
II. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TAM GIÁC.

1. PHƯƠNG PHÁP:

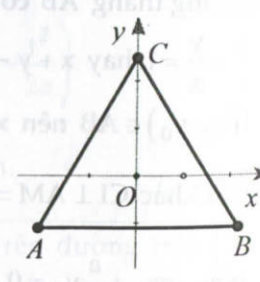
a) Nếu tam giác ABC đều ta thường thiết lập hệ trục tọa độ Oxy theo một trong ba dạng sau:



O là trung điểm AB



O trùng với một đỉnh của tam giác

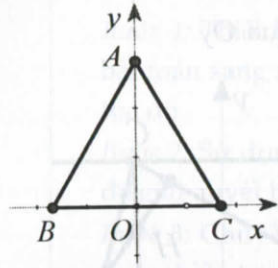


O là trọng tâm tam giác

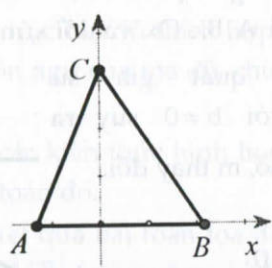
b) Nếu tam giác ABC cân tại A, ta thường thiết lập hệ trục tọa độ như sau: Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm BC; B, C thuộc trục Ox; A thuộc trục Oy. (hình 3.8)

c) Nếu tam giác ABC vuông tại A, ta thường thiết lập hệ trục tọa độ như sau: Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O trùng với A; B thuộc trục Ox; C thuộc trục Oy. (hình 3.10)

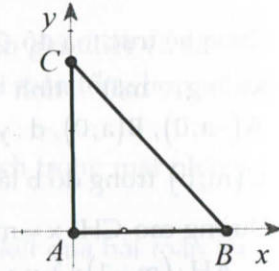
d) Nếu tam giác ABC bất kỳ, ta thường thiết lập hệ trục tọa độ như sau: Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho hai đỉnh thuộc trục Ox và đỉnh còn lại thuộc trục Oy. (hình 3.9)



Hình 3.8



Hình 3.9



Hình 3.10

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông cân tại C. Dựng đoạn CI (với $I \in AB$) vuông góc với trung tuyến AM.

a) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng CI và CA.

b) Tính tỷ số $\frac{BI}{AI}$.

Lời giải (hình 3.11)

Cho hệ trục tọa độ Oxy với $C \equiv O, A \in Ox, B \in Oy$, giả sử $CB = CA = a > 0$

Khi đó $A(a;0), B(0;a), C(0;0), M(0; \frac{a}{2})$

Đường thẳng AB có phương trình là

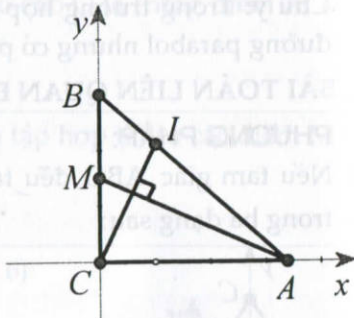
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \text{ hay } x + y - a = 0$$

$I(x_0; y_0) \in AB$ nên $x_0 + y_0 - a = 0$ (1)

Mặt khác $CI \perp AM \Rightarrow \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ mà $\overrightarrow{CI}(x_0; y_0), \overrightarrow{AM}(-a; \frac{a}{2})$

$$\text{nên } -ax_0 + \frac{a}{2}y_0 = 0 \text{ hay } 2x_0 - y_0 = 0 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} x_0 + y_0 - a = 0 \\ 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{a}{3} \\ y_0 = \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{a}{3}; \frac{2a}{3})$$



Hình 3.11

a) Ta có $\overrightarrow{CI}(\frac{a}{3}; \frac{2a}{3}), \overrightarrow{CA}(a;0)$ do đó

$$\cos(CI; CA) = \left| \cos(\overrightarrow{CI}; \overrightarrow{CA}) \right| = \frac{\frac{a^2}{3}}{a\sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

b) Ta có $BI = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}, AI = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ suy ra $\frac{BI}{AI} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: (Vô địch Toán Anh) Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, G là trọng tâm tam giác ACM. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng GI vuông góc với CM.

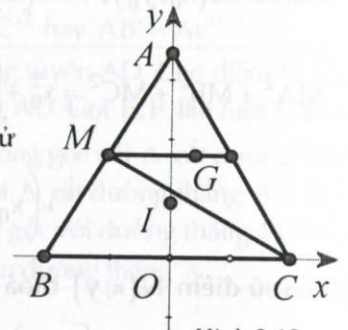
Lời giải (hình 3.12)

Cho hệ trục tọa độ Oxy với O là trung điểm BC, $B \in Ox, C \in Ox, A \in Oy$.

Không mất tính tổng quát giả sử $BC = 2t, t > 0 \Rightarrow B(-t;0), C(t;0)$ và $A(0;a), a > 0$

Do M là trung điểm AB và G là trọng tâm tam

giác ACM nên $M(-\frac{t}{2}, \frac{a}{2}), G(\frac{t}{6}, \frac{a}{6})$.



Hình 3.12

Mặt khác I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân ABC suy ra $I \in AO$ và $IA = IB$

Gọi tọa độ điểm I là $I(0;y)$ suy ra

$$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (y-a)^2 = t^2 + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2 - t^2}{2a}$$

nên ta có $I(0, \frac{a^2 - t^2}{2a})$. Khi đó $\overrightarrow{CM} = (-\frac{3t}{2}, \frac{a}{2}); \overrightarrow{GI} = (-\frac{t}{6}, -\frac{t^2}{2a})$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{GI} = -\frac{3t}{2} \cdot (-\frac{t}{6}) + \frac{a}{2} \cdot (-\frac{t^2}{2a}) = 0 \Rightarrow CM \perp GI \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: Cho ΔABC đều cạnh a. M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

a) Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2$

b) Tìm tập hợp điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{NA} = \frac{a^2}{4}$ (*)

Lời giải (hình 3.13)

a) Chọn hệ trục tọa độ Oxy với trọng tâm $G \equiv O$, $A \in Oy$, $BC \parallel Ox$

Ta có $AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ suy ra tọa độ các điểm là

$$A\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}\right), B\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right), C\left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$$

Vì tam giác ABC đều nên đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm là G bán kính AG

suy ra có phương trình là (C): $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{3}$

Giả sử $M(x_0; y_0)$, $M \in (C) \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2}{3}$ suy ra

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= x_0^2 + \left(y_0 - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(x_0 + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \\ &\quad + \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 3(x_0^2 + y_0^2) = a^2 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

b) Giả sử điểm $N(x; y)$ thỏa mãn (*)

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NA} = \left(-x; \frac{a\sqrt{3}}{3} - y\right), \overrightarrow{NB} = \left(-\frac{a}{2} - x; -\frac{a\sqrt{3}}{6} - y\right), \overrightarrow{NC} = \left(\frac{a}{2} - x; -\frac{a\sqrt{3}}{6} - y\right)$$

Do đó

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow x\left(\frac{a}{2} + x\right) + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) + \left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right) + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \\ + \left(x - \frac{a}{2}\right)x + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm N thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{a}{2}$.

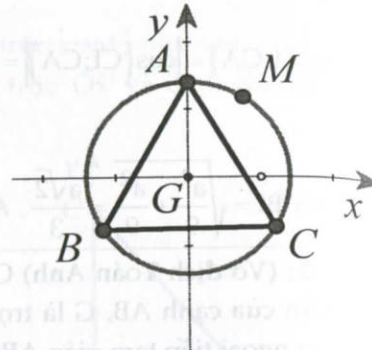
Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Trên đoạn HB, HC lấy điểm B', C' sao cho góc $\widehat{AB'C}$ và góc $\widehat{AC'B}$ bằng 90° . Chứng minh rằng $AB' = AC'$.

Lời giải (hình 3.14)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với $A \in Oy$; $B, C \in Ox$

Giả sử $A(0; a)$, $B(b; 0)$, $C(c; 0)$ với $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$

Ta có $\overrightarrow{AC}(c; -a)$ nên đường cao BH nhận $\vec{u}(a; c)$



Hình 3.13

làm vector chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x = b + at \\ y = ct \end{cases}$

$B' \in BC \Rightarrow B'(b + at; ct)$

Mặt khác $\widehat{AB'C} = 90^\circ$ suy ra $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CB'} = 0$,

$$\overrightarrow{AB'}(b + at; a + ct), \overrightarrow{CB'}(at + b - c; ct)$$

Do đó $(b + at)(at + b - c) + (a + ct)ct = 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 + c^2)t + 2a(b - c)t + b(b - c) = 0 \quad (1)$$

Ta có $AB'^2 = (at + b)^2 + (ct - a)^2 = (a^2 + c^2)t^2 + 2a(b - c)t + a^2 + b^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AB'^2 = a^2 + bc$

Tương tự ta có $AC'^2 = a^2 + bc$ suy ra $AB'^2 = AC'^2$ hay $AB' = AC'$

Ví dụ 5. (VMO 2008) Cho tam giác ABC với trung tuyến AD. Cho điểm M nằm trên đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng AD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MB, MC. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với Δ cắt đường thẳng AB ở P, đường thẳng đi qua F và vuông góc với Δ cắt đường thẳng AC ở Q. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đường thẳng Δ .

Lời giải (hình 3.15)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với $D \equiv O$, $A \in Oy$, $\Delta \parallel Oy$

Đặt $A(0; a)$, $D(0; 0)$, $B(-b; -c)$, $C(b; c)$, trong đó $a, b, c (a > 0)$ là các hằng số.

Giả sử $M(t; d)$ là điểm di động trên Δ trong đó d là hằng số, t thay đổi

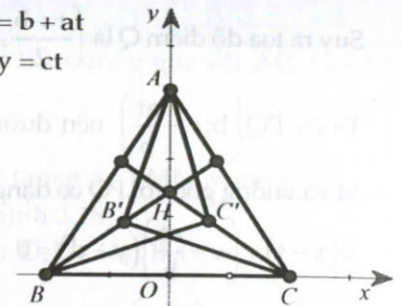
E là trung điểm MB nên $E\left(\frac{t-b}{2}; \frac{d-c}{2}\right)$, suy ra đường thẳng đi qua E và vuông

góc với Δ có phương trình là $x = \frac{t-b}{2}$, đường thẳng đi qua hai điểm A, B có phương trình là $(a+c)x - b(y-a) = 0$

Suy ra tọa độ điểm P là $P\left(\frac{t-b}{2}; \frac{(c+a)t}{2b} + \frac{a-c}{2}\right)$

Tương tự ta có F là trung điểm của MC nên $F\left(\frac{t+b}{2}; \frac{d+c}{2}\right)$, đường thẳng đi qua

F và vuông góc với Δ có phương trình $x = \frac{t+b}{2}$. Đường thẳng đi qua AC có phương trình là $(a-c)x + b(y-a) = 0$



Hình 3.14

Suy ra tọa độ điểm Q là $\left(\frac{t+b}{2}, \frac{(c-a)t}{2b} + \frac{a+c}{2}\right)$

Ta có $\overline{PQ} \left(b; c - \frac{at}{b}\right)$ nên đường thẳng đi qua

M và vuông góc với PQ có dạng là

$$b(x-t) + \left(c - \frac{at}{b}\right)(y-d) = 0$$

$$\Leftrightarrow t\left(\frac{a}{b}(y-d) + b\right) - c(y-d) - bx = 0$$

Đẳng thức (*) đúng với mọi t khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{a}{b}(y-d) + b = 0 \\ c(y-d) + bx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{bc}{a} \\ y = -\frac{b^2}{a} + d \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng qua M và vuông góc với PQ luôn đi qua điểm $R\left(\frac{bc}{a}; -\frac{b^2}{a} + d\right)$

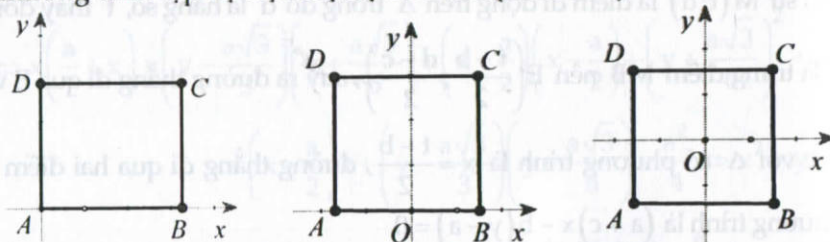
Chú ý: Trong trường hợp này, để tận dụng tốt nhất các giả thiết vuông góc và trung điểm, ta đã linh hoạt chọn hệ trục tọa độ có trục tung là trung tuyến AD thay vì đường cao ứng với đỉnh A.

III. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC ĐẶC BIỆT.

1. PHƯƠNG PHÁP.

a) Nếu ABCD là hình vuông hoặc hình chữ nhật.

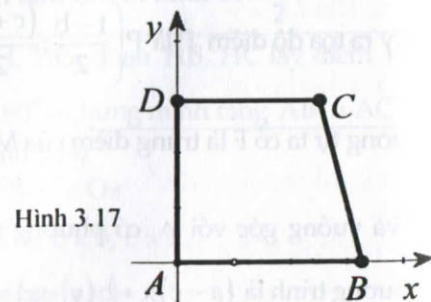
Ta thường thiết lập hệ trục tọa độ như sau (hình 3.16)



Hình 3.16

b) Nếu ABCD là hình thang vuông.

Ta thường thiết lập hệ tọa độ Oxy như hình vẽ (hình 3.17)



Hình 3.17

2. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ BK vuông góc với AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD.

a) Chứng minh: $\widehat{BMN} = 90^\circ$

b) Tìm điều kiện của hình chữ nhật để tam giác BMN vuông cân.

Lời giải (hình 3.18)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $C \equiv O, D \in Ox, B \in Oy$

Giả sử $AB = a, BC = b$ suy ra

$$A(a; b), B(0; b), C(0; 0), D(a; 0)$$

Đường thẳng AC có phương trình là

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{ hay } bx - ay = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng BK nhận $\vec{n}(b; -a)$ là VTCP

nên có phương trình là
$$\begin{cases} x = bt \\ y = b - at \end{cases} \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta có $b^2t - a(b - at) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{ab}{a^2 + b^2}$

Suy ra $K\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}; \frac{b^3}{a^2 + b^2}\right)$

M là trung điểm của AK nên $M\left(\frac{a^3 + 2ab^2}{2(a^2 + b^2)}; \frac{a^2b + 2b^3}{2(a^2 + b^2)}\right)$

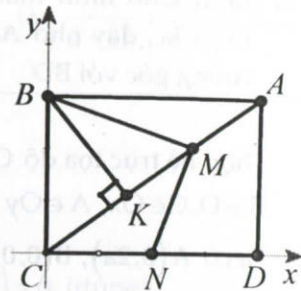
N là trung điểm của CD nên $N\left(\frac{a}{2}; 0\right)$

a) Ta có $\overline{BM}\left(\frac{a^3 + 2ab^2}{2(a^2 + b^2)}; \frac{-a^2b}{2(a^2 + b^2)}\right), \overline{NM}\left(\frac{ab^2}{2(a^2 + b^2)}; \frac{a^2b + 2b^3}{2(a^2 + b^2)}\right)$

Suy ra $\overline{BM} \cdot \overline{NM} = \frac{ab^2(a^3 + 2ab^2) - a^2b(a^2b + 2b^3)}{4(a^2 + b^2)^2} = 0 \Rightarrow \widehat{BMN} = 90^\circ$

b) Theo câu a) ta có $\widehat{BMN} = 90^\circ$ nên $\triangle BMN$ vuông cân khi và chỉ khi

$$BM = NM \Leftrightarrow \left(\frac{a^3 + 2ab^2}{2(a^2 + b^2)}\right)^2 + \left(\frac{-a^2b}{2(a^2 + b^2)}\right)^2 = \left(\frac{ab^2}{2(a^2 + b^2)}\right)^2 + \left(\frac{a^2b + 2b^3}{2(a^2 + b^2)}\right)^2$$



Hình 3.18

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (a^3 + 2ab^2)^2 - (ab^2)^2 = (a^2b + 2b^3)^2 - (a^2b)^2 \\ &\Leftrightarrow (a^3 + 3ab^2)(a^3 + ab^2) = 2b^3(2a^2b + 2b^3) \\ &\Leftrightarrow a^4 + 3a^2b^2 - 4b^4 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + 4b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Hay ABCD là hình vuông

Ví dụ 2. Cho hình thang vuông ABCD có đường cao AB = 2a, đáy lớn BC = 3a, đáy nhỏ AD = a. I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng AI vuông góc với BD

Lời giải (hình 3.19)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho

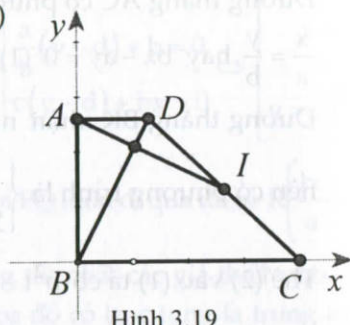
B ≡ O, C ∈ Ox, A ∈ Oy

Ta có A(0; 2a), B(0; 0), C(3a; 0), D(a; 2a)

I là trung điểm của DC nên I(2a; a)

$\overrightarrow{AI}(2a; -a)$, $\overrightarrow{BD}(a; 2a)$ suy ra $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

Vậy AI vuông góc với BD



Hình 3.19

Ví dụ 3: Cho hình vuông ABCD. Trên BD lấy điểm M không trùng với B, D. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh AB, AD. Chứng minh rằng

a) CM vuông góc với EF

b) Ba đường thẳng CM, BF, DE đồng quy.

Lời giải (hình 3.20)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho A ≡ O, B ∈ Ox, D ∈ Oy

Không mất tính tổng quát giả sử AB = a

$$\Rightarrow B(a; 0), D(0; a), C(a; a), BD: \begin{cases} x = a - at \\ y = at \end{cases}$$

a) Vì M ∈ BD ⇒ M(a - az; az), E(a - az; 0), F(0; az)

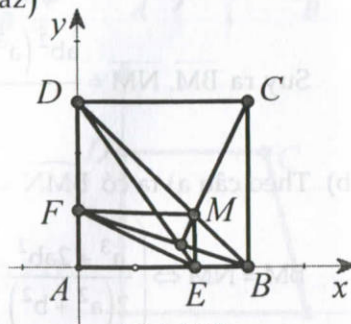
Do đó $\overrightarrow{CM}(-az; az - a)$, $\overrightarrow{EF}(az - a; az)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{EF} = -az(az - a) + (az - a)az = 0$$

Vậy nên CM ⊥ EF

b) Đường thẳng CM đi qua C và nhận $\overrightarrow{CM}$ làm VTCP có phương trình là

$$\begin{cases} x = a - azt \\ y = a + (az - a)t \end{cases} \quad (1)$$



Hình 3.20

Đường thẳng BF có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{az} = 1$ hay $zx + y - az = 0$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có $z(a - azt) + a + (az - a)t - az = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{z^2 - z + 1}$

Suy ra tọa độ giao điểm của BF và CM là K $\left(\frac{a(z-1)^2}{z^2 - z + 1}; \frac{az^2}{z^2 - z + 1} \right)$

Mặt khác đường thẳng DE có phương trình là $\frac{x}{a - az} + \frac{y}{a} = 1$ hay

$$x + (1 - z)y + a(z - 1) = 0 (*)$$

Thay tọa độ K vào phương trình (*) ta có

$$\frac{a(z-1)^2}{z^2 - z + 1} + (1 - z) \frac{az^2}{z^2 - z + 1} + a(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow az^2 - 2az + a + az^2 - az^3 + a(z^3 - z^2 + z - z^2 + z - 1) = 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy tọa độ điểm K là nghiệm của phương trình đường thẳng DE do đó ba đường thẳng CM, BF, DE đồng quy.

IV. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN.

1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Ta thường chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tâm của đường tròn là gốc tọa độ hoặc nằm trên các trục tọa độ.

2. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (C) có đường kính AB không đổi, một điểm M di động trên (C). Gọi H là hình chiếu của M trên AB. Tìm tập hợp trung điểm I của MH.

Lời giải (hình 3.21)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với A, B ∈ Ox và đối xứng qua Oy

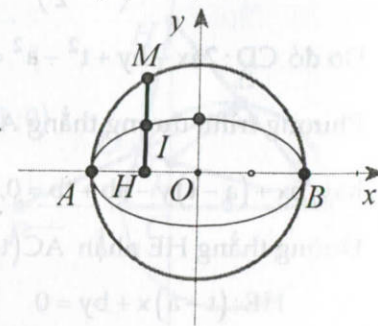
Ta có bán kính đường tròn (C) là $R = \frac{AB}{2}$

Suy ra (C) có phương trình là $x^2 + y^2 = R^2$.

Giải sử I(x; y) suy ra H(x; 0)

I là trung điểm MH nên

$$\begin{cases} x_M = 2x_I - x_H = x \\ y_M = 2y_I - y_H = 2y \end{cases} \Rightarrow M(x; 2y)$$



Hình 3.21

Mặt khác $M \in (C)$ suy ra $x^2 + (2y)^2 = R^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{4}} = 1$

Chứng tỏ tập hợp I là elip (E): $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{4}} = 1$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (C) đường kính AB. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C) sao cho tam giác ABC không cân tại C. Gọi H là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ C. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AC, BC. Đường thẳng EF cắt AB tại K. Gọi D là giao điểm (C) và đường tròn (C') đường kính CH ($D \neq C$). Chứng minh rằng K, D, C thẳng hàng.

Lời giải (hình 3.22)

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho

$H \equiv O, C \in Oy, A \in Ox, B \in Ox$

Không mất tính tổng quát giả sử $AB = 2t$.

Gọi I là trung điểm AB và giả sử

$I(a;0), -t < a < t, a \neq 0; C(0;b)$.

Suy ra $A(-t+a;0), B(t+a;0)$

Vì tam giác ACB vuông tại C có đường cao AH

nên $CH^2 = AH.BH \Rightarrow b^2 = t^2 - a^2$ (*)

Ta có (C): $(x-a)^2 + y^2 = t^2, (C'): x^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$

C, D là hai giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') nên tọa độ của nó là nghiệm của phương trình:

$$(x-a)^2 + y^2 - x^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = t^2 - \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow 2ax - by + t^2 - a^2 = 0$$

Do đó CD: $2ax - by + t^2 - a^2 = 0$

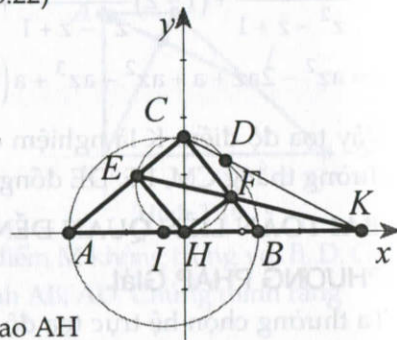
Phương trình đường thẳng AC là $AC: \frac{x}{-t+a} + \frac{y}{b} = 1$

hay $bx + (a-t)y - ab + tb = 0$,

Đường thẳng HE nhận $\overline{AC}(t-a; b)$ làm VTPT nên có phương trình là

$$HE: (t-a)x + by = 0$$

Tọa độ của E là nghiệm của hệ tạo bởi phương trình đường thẳng AC và EH



Hình 3.22

Suy ra $E\left(\frac{b^2(a-t)}{b^2 + (a-t)^2}; \frac{b(a-t)^2}{b^2 + (a-t)^2}\right)$ kết hợp (*) suy ra $E\left(-\frac{b^2}{2t}; \frac{b(t-a)}{2t}\right)$

Tương tự ta có $AC: \frac{x}{t+a} + \frac{y}{b} = 1$

$$\Leftrightarrow bx + (t+a)y - b(t+a) = 0 \text{ và } HF: -(t+a)x + by = 0$$

Suy ra tọa độ điểm H là $H\left(\frac{b^2(a+t)}{b^2 + (a+t)^2}; \frac{b(a+t)^2}{b^2 + (a+t)^2}\right)$ kết hợp (*) suy ra

$$H\left(\frac{b^2}{2t}; \frac{b(t+a)}{2t}\right)$$

Do đó đường thẳng EH có phương trình là $\frac{x + \frac{b^2}{2t}}{b} = \frac{y - \frac{b(t-a)}{2t}}{a}$ hay

$$2ax - 2by + b^2 = 0$$

Cho $y=0 \Rightarrow x = -\frac{b^2}{2a}$ do đó $K\left(-\frac{b^2}{2a}; 0\right)$

Thay tọa độ K vào phương trình đường thẳng DC ta được

$$2a \cdot \left(-\frac{b^2}{2a}\right) + t^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = t^2 - a^2 \text{ (đúng do (*))}$$

Vậy điểm K thuộc đường thẳng CD hay ba điểm K, D, C thẳng hàng đpcm.

Ví dụ 3: Cho đường tròn (C) đường kính AB, đường thẳng Δ vuông góc với AB tại C cố định. H là điểm thay đổi trên Δ . Giả sử AH và BH cắt đường tròn tại D và E. Chứng minh rằng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải (hình 3.23)

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho

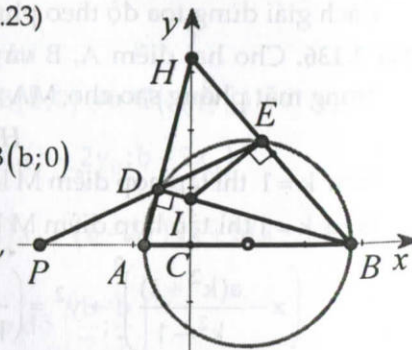
$C \equiv O, A \in Ox, B \in Oy, \Delta \equiv Oy$

Không mất tính tổng quát giả sử $A(a;0), B(b;0)$

Suy ra (C): $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$ (1),

giả sử $H(0;m), m \neq 0$ và m thay đổi.

Gọi I là giao của BD và Δ .



Hình 3.23

Ta có $\overline{AH} = (-a; m)$ làm VTPT của đường thẳng BD nên

$$BD: -a(x - b) + my = 0 \Leftrightarrow -ax + my + ab = 0$$

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow y = -\frac{a^2}{m} \Rightarrow I\left(0; -\frac{ab}{m}\right)$$

$$\text{Suy ra đường tròn đường kính HI là } x^2 + \left(y - \frac{m^2 - ab}{2m}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + ab}{2m}\right)^2 \quad (2)$$

D, E là giao của hai đường tròn (C) và đường tròn đường kính HI nên tọa độ thỏa mãn phương trình (1) và (2) do đó nó thỏa mãn phương trình

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 - x^2 - \left(y - \frac{m^2 - ab}{2m}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4} - \left(\frac{m^2 + ab}{2m}\right)^2$$

$$\text{Hay } -(a+b)x + \frac{m^2 - ab}{m}y + 2ab = 0 \text{ và đây chính là đường thẳng DE.}$$

$$\text{Suy ra DE đi qua điểm cố định là } P\left(\frac{2ab}{a+b}; 0\right).$$

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.135: Cho đoạn $AB = a, a > 0$ cố định. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$MA^2 + MB^2 = \frac{5a^2}{2}. \text{ Hãy nêu và giải bài toán tổng quát dạng này.}$$

Hướng dẫn giải

Đó là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = a^2$.

Bài toán tổng quát có thể phát biểu là:

Cho đoạn $AB = a$ cố định.

Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $uMA^2 + vMB^2 = ka^2; u, v, k \in \mathbb{R}$.

Cách giải dùng tọa độ theo phương pháp tương tự.

Bài 3.136. Cho hai điểm A, B và một số thực dương k. Tìm tập hợp điểm M trong mặt phẳng sao cho $MA = kMB$.

Hướng dẫn giải

Nếu $k = 1$ thì tập hợp điểm M là đường thẳng $x = 0$, tức là trung trực của AB.

Nếu $k \neq 1$ thì tập hợp điểm M là đường tròn có phương trình

$$\left(x - \frac{a(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ka}{k^2 - 1}\right)^2$$

Tập hợp này còn gọi là đường tròn Apollonius.

Bài 3.137: Cho A, B cố định.

Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\widehat{MAB} - \widehat{MBA}| = 90^\circ$.

Hướng dẫn giải

Không mất tổng quát ta giả sử $AB = 2a$. Gắn hệ trục tọa độ Oxy với O là trung điểm AB, $A, B \in Ox$

Ta có $A(-a; 0), B(a; 0)$.

Giả sử $M(x; y) \Rightarrow \overline{AM} = (x + a; y); \overline{BM} = (x - a; y); \overline{AB} = (2a; 0)$

$$\cos \widehat{MAB} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AB}|} = \frac{x + a}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}} \Rightarrow |\tan \widehat{MAB}| = \left| \frac{y}{x + a} \right|$$

$$\cos \widehat{MBA} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BM}| \cdot |\overline{BA}|} = \frac{-(x - a)}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}} \Rightarrow |\cot \widehat{MBA}| = \left| \frac{y}{x - a} \right|$$

Ta có: $|\widehat{MBA} - \widehat{MAB}| = 90^\circ \Rightarrow \tan \widehat{MAB} = -\cot \widehat{MBA}$ và $\widehat{MBA}; \widehat{MAB}$ là 2 góc trong 1 tam giác nên trong 2 góc có 1 góc tù và 1 góc nhọn

$$\Rightarrow \cot \widehat{MBA} \cdot \tan \widehat{MAB} < 0$$

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{MAB} = -\cot \widehat{MBA} \Leftrightarrow |\tan \widehat{MAB}| = |\cot \widehat{MBA}|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{y}{\sqrt{x + a}} \right| = \left| \frac{y}{\sqrt{x - a}} \right| \Leftrightarrow y^2 = |x^2 - a^2|$$

Ta có $|x| > a$ (vì nếu $|x| \leq a$ ta có ΔMAB không tù) nên tập hợp điểm M là

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ trừ đi hai điểm A và B.}$$

Bài 3.138: Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B. Xét điểm C thay đổi trên nửa mặt phẳng bờ AB. Dựng ra ngoài của tam giác ABC các hình vuông ACED và BCFG. Chứng minh rằng đường thẳng DG luôn đi qua một điểm cố định khi C thay đổi.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A \equiv O, B(b; 0)$ và $C(x_0; y_0)$ với $y_0 > 0$.

Khi đó $D(-y_0; x_0), G(b + y_0; b - x_0) \Rightarrow \overline{DG}(b + 2y_0; b - 2x_0)$

$$\text{Suy ra DG: } \frac{x + y_0}{b + 2y_0} = \frac{y - x_0}{b - 2x_0} \text{ hay } (b - 2x)x_0 + (b - 2y)y_0 + b(x - y) = 0.$$

Do đó DG luôn đi qua điểm cố định có tọa độ $\left(\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right)$.

Bài 3.139: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn trong các trường hợp sau:

a) $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{AB}$ b) $(\overline{MA} + \overline{MB})(\overline{MA} + \overline{MC}) = 0$

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $B, C \in Ox$, O là trung điểm của BC. Giả sử $A(a_1; a_2)$, $B(-b; 0)$, $C(b; 0)$, $M(x; y)$

a) Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB

b) Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(x - \frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$

Bài 3.140: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm HD. Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $H \equiv O$; $A \in Oy$; $B, C \in Ox$

Giả sử $A(0; a)$, $B(-b; 0)$, $C(b; 0)$, $a > 0, b > 0$

Vì $\begin{cases} \overline{AD} // \overline{AC} \\ \overline{HD} \perp \overline{AC} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}, \frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$, $M\left(\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}, \frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}\right)$

Do đó $\overline{AM} \cdot \overline{BD} = 0 \Rightarrow AM \perp BD$

Bài 3.141: Cho tam giác đều ABC. M là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác. Gọi D, E, F là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB.

Chứng minh rằng $P = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 2(MD^2 + ME^2 + MF^2)$ không phụ thuộc vào điểm M.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $B, C \in Ox$, Oy là trung trực đoạn BC

Giả sử cạnh tam giác có độ dài bằng 2a suy ra $B(-a; 0)$, $C(a; 0)$, $A(0; a\sqrt{3})$

viết được phương trình các cạnh tam giác khi đó

$MD = d(M; BC)$, $ME = d(M; CA)$, $MF = d(M; AB)$

Từ đó ta tính được $P = 2a^2$ không đổi.

Bài 3.142: Cho tam giác ABC, đường tròn đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D. Gọi F, H là hình chiếu của D và E trên BC. Gọi M là giao điểm của EF và DG. Chứng minh rằng AM vuông góc với BC.

Hướng dẫn giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A \in Oy$, $B \in Ox$, $C \in Ox$

Giả sử $A(0; a)$, $B(b; 0)$, $C(c; 0)$ với chú ý là điểm M sẽ nằm trên trục tung.

Bài 3.143: Cho tam giác ABC đều, gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa đường thẳng Δ bất kỳ với đường thẳng BC, CA, AB.

Chứng minh rằng $16(\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma) = 1$

Hướng dẫn giải

Giả sử tam giác ABC có cạnh bằng 2a và Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(x; y)$.

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A \in Oy$, $B \in Ox$, $C \in Ox$.

Khi đó $A(0; \sqrt{3}a)$, $B(-a; 0)$, $C(a; 0) \Rightarrow \overline{AB}(-a; -\sqrt{3}a)$, $\overline{BC}(2a; 0)$, $\overline{AC}(a; -\sqrt{3}a)$

Suy ra $\cos \alpha = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$

$\cos \beta = \frac{|x - \sqrt{3}y|}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{4(x^2 + y^2)}$, $\sin^2 \beta = \frac{3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2}{4(x^2 + y^2)}$

$\cos \gamma = \frac{|x + \sqrt{3}y|}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{4(x^2 + y^2)}$, $\sin^2 \gamma = \frac{3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2}{4(x^2 + y^2)}$

Từ đó thay vào ta được đpcm.

Bài 3.144: Cho tam giác ABC không cân có hai đỉnh B và C cố định và đỉnh A di động. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt trung tuyến AI của tam giác ABC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu IH song song với KC thì điểm A di động trên một đường cố định.

Hướng dẫn giải

Giả sử $BC = 2a$

Chọn hệ trục Oxy sao cho $I \equiv O$, $B \in Ox$, $C \in Ox$

Ta có $B(-a; 0)$, $C(a; 0)$, $I(0; 0)$

Giả sử $A(x_0; y_0)$, $x_0 y_0 \neq 0 \Rightarrow H\left(x_0; \frac{a^2 - x_0^2}{y_0}\right)$, $K\left(-a; -\frac{ay_0}{x_0}\right)$

$\overline{IH}\left(x_0; \frac{a^2 - x_0^2}{y_0}\right)$, $\overline{KC}\left(2a; \frac{ay_0}{x_0}\right)$

IH song song với KC

$\Leftrightarrow \frac{x_0}{2a} = \frac{a^2 - x_0^2}{y_0} : \frac{ay_0}{x_0} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{2a^2} = 1$ hay $A \in (E): \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{2a^2} = 1$

Bài 3.145. Cho tam giác ABC có 2 đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Gọi H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm A biết trung điểm K của HG nằm trên đường thẳng BC

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $BC = 2t, t > 0$

Gắn vào hệ trục tọa độ Oxy với $B \in Ox, C \in Ox, O$ là trung điểm BC.

Ta có $B(-t;0), C(t;0)$. Giả sử $A(a;b)$

Ta tính được tọa độ của G, H theo

$$a, b : H\left(a, \frac{t^2 - a^2}{b}\right), G\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right) \Rightarrow K\left(\frac{2a}{3}, \frac{3t^2 - 3a^2 + b^2}{b}\right)$$

$$K \in BC \Leftrightarrow 3t^2 - 3a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{t^2} - \frac{b^2}{3t^2} = 1$$

Vậy tập hợp điểm A là hypebol (H): $\frac{a^2}{t^2} - \frac{b^2}{3t^2} = 1$, loại đi 2 điểm B, C.

Bài 3.146: Cho tam giác ABC có đường cao AD. Lấy hai điểm E, F thuộc đường thẳng Δ đi qua D và khác D sao cho $AE \perp BE, AF \perp CF$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF. Chứng minh rằng $AN \perp MN$.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho A làm gốc tọa độ, trục hoành chứa đường thẳng qua A song song với Δ .

$$\text{Giả sử } D(d;a), E(e;a), F(f;a) \Rightarrow N\left(\frac{e+f}{2}; a\right)$$

$$\text{Khi đó } AE: ax - ey = 0, AD: ax - dy = 0, AF: ax - fy = 0$$

$$\text{Vì } AE \perp BE \Rightarrow BE: ex + ay - e^2 - a^2 = 0, CF \perp AF \Rightarrow CF: fx + ay - f^2 - a^2 = 0$$

$$BC \perp AD \Rightarrow BC: dx + ay - d^2 - a^2 = 0$$

$$\text{Từ đó, ta tìm được } B\left(d+e; a - \frac{de}{a}\right), C\left(d+f; a - \frac{df}{a}\right)$$

$$\text{suy ra } M\left(d + \frac{e+f}{2}; a - \frac{d(e+f)}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{MN} = \left(-d; \frac{d(e+f)}{2a}\right) \Rightarrow \overline{MN} \cdot \overline{AN} = -d \cdot \frac{e+f}{2} + a \cdot \frac{d(e+f)}{2a} = 0$$

Bài 3.147: Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm D, E di động với D là điểm nằm trên cạnh AB và điểm E trên cạnh BC sao cho hình chiếu của DE trên BC có độ dài bằng nửa đoạn BC. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với DE tại E luôn đi qua điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A \in Oy, B, C \in Ox, O$ là trung điểm BC.

Giả sử $A(0;a), B(-b;0), C(b;0), a > 0, b > 0$

$$\text{Khi đó } AB: -\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1, AC: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

Gọi H là hình chiếu của D lên BC.

$$E(x_0;0), 0 \leq x_0 \leq b \text{ thì } H(x_0 - b;0) \Rightarrow D\left(x_0 - b; \frac{ax_0}{b}\right)$$

Đường thẳng Δ vuông góc với DE tại E có phương trình là

$$\Delta: b^2x - ax_0y - b^2x_0 = 0$$

Hay $-x_0(b^2 + ay) + b^2x = 0$ suy ra Δ đi qua điểm cố định có tọa độ là

$$\left(0; -\frac{b^2}{a^2}\right)$$

Bài 3.148: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh BC và N là chân đường phân giác của góc BAC. Đường thẳng vuông góc với NA cắt các đường thẳng AB, AM lần lượt tại P, Q. Gọi I là giao điểm đường vuông góc với AB tại P và AN. Chứng minh rằng $IQ \perp BC$.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $N \equiv O, A, I \in Oy$

$$\text{Giả sử } AB: y = ax + b \Rightarrow A\left(-\frac{b}{a}; 0\right), P(0;b), AC: y = -ax - b$$

$$\text{Do } PI \perp AB \text{ nên } PI: y = -\frac{1}{a}x + b \text{ và } I(ab;0)$$

$$\text{Giả sử } BC: y = cx \Rightarrow B\left(\frac{b}{c-a}; \frac{bc}{c-a}\right), C\left(-\frac{b}{c+a}; -\frac{bc}{c+a}\right), M\left(\frac{ab}{c^2 - a^2}; \frac{abc}{c^2 - a^2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \overline{AM} \left(\frac{bc^2}{a(c^2 - a^2)}; \frac{abc}{c^2 - a^2}\right) \Rightarrow AM: a^2x - cy + ab = 0, Q\left(0; \frac{ab}{c}\right)$$

$$\text{Do đó } \overline{QI} \left(ab; -\frac{ab}{c}\right) \Rightarrow \overline{AM} \cdot \overline{QI} = 0. \text{ Vậy } IQ \perp BC$$

Bài 3.149: Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách từ M đến BC bằng trung bình nhân khoảng cách từ M đến AB và AC.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ .. sao cho $A \in Oy$; $B, C \in Ox$.

Giả sử $A(0; a)$, $B(b; 0)$, $C(c; 0)$, $a > 0$.

Điểm M bất kì trong mặt phẳng có tọa độ là $M(x, y)$.

Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + by = ab$.

Khoảng cách từ M đến AB là $d_2 = \frac{|ax + by - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Phương trình đường thẳng AC là $\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + cy = ac$.

Khoảng cách từ M đến AC là $d_3 = \frac{|ax + cy - ac|}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

Khoảng cách từ M đến BC là $d_1 = |y|$.

Theo giả thiết, ta có

$$d_1^2 = d_2 d_3 \Rightarrow y^2 = \frac{|ax + by - ab| |ax + cy - ac|}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} y^2 = |(ax + by - ab)(ax + cy - ac)|$$

Đây chính là quỹ tích cần tìm.

Trong trường hợp tam giác ABC cân tại A, quỹ tích trên có thể xác định đơn giản hơn gồm hai đường cong bậc hai.

Bài 3.150: Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R, S là hình chiếu của M trên các đoạn thẳng AD, AB, BC, CD. Chứng minh rằng $PQ \perp RS$.

Hướng dẫn giải

Nếu gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD thì O cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật đó.

Do đó ta chọn gốc trục tọa độ là O, các trục thì song song với các cạnh của hình chữ nhật.

Giả sử $A(-a; -b)$, $B(a; b)$, $C(a; b)$, $D(-a; -b)$, bán kính đường tròn là R suy ra $a^2 + b^2 = R^2$

$$M(x_0; y_0) \Rightarrow P(x_0; -b), Q(-a; y_0), R(x_0; b), S(a; y_0)$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} \cdot \overline{RS} = -a^2 + x_0^2 + y_0^2 - b^2 = 0.$$

Bài 3.151. Cho hình chữ nhật ABCD. Các điểm E, F thuộc cạnh CD sao cho $DE = EF = FC$. Các điểm G, H thuộc cạnh BC sao cho $BG = GH = HC$. Đường thẳng AE cắt DG tại M, đường thẳng AF cắt DH lần lượt tại N. Chứng minh rằng MN song song với CD.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $C \equiv O$, $D \in Ox$, $B \in Oy$

Giả sử $D(3a; 0)$, $B(3b; 0)$; $a, b > 0$

Suy ra $A(3a; 3b)$, $E(2a; 0)$, $F(a; 0)$, $G(0; 2b)$, $H(0; b)$

$$GD: \frac{x}{3a} + \frac{y}{2b} = 1, GH: \frac{x}{3a} + \frac{y}{b} = 1; AE: \frac{x - 2a}{a} = \frac{y}{3b}, AF: \frac{x - a}{2a} = \frac{y}{3b}$$

$$\text{Suy ra } M\left(\frac{24a}{11}; \frac{6b}{11}\right), N\left(\frac{15a}{11}; \frac{6b}{11}\right) \Rightarrow MN \parallel CD$$

Bài 3.152: Cho hình vuông ABCD. Từ A kẻ một đường thẳng bất kỳ cắt BC, DC tương ứng tại E và F. Gọi I là trung điểm của BE.

- Chứng minh rằng FI tiếp xúc với đường tròn nội tiếp hình vuông
- Giả sử DE cắt FI tại M. Chứng minh rằng M nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là tâm hình vuông, các cạnh hình vuông tương ứng song song với các trục tọa độ

Giả sử $A(-a; -a)$, $B(a; -a)$, $C(a; a)$, $D(-a; a)$, hệ số góc AF là m khi đó

$$AF: y = m(x + a) - a \Rightarrow F\left(\frac{2a - am}{m}; a\right), E(a; 2am - a), I(a; am - a)$$

$$\text{a) Ta có } FI: (2m - m^2)x - 2(1 - m)y - a(m^2 - 2m + 2) = 0$$

Suy ra $d(O; FI) = a \Rightarrow FI$ tiếp xúc với đường tròn nội tiếp hình vuông

$$\text{b) Ta có } M\left(\frac{2a - am^2}{m^2 - 2m + 2}; \frac{-am^2 + 4am + 2a}{m^2 - 2m + 2}\right) \Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = 2a^2 \text{ suy ra M thuộc đường tròn ngoại tiếp hình vuông.}$$

Bài 3.153. Cho góc vuông xOy. Một hình chữ nhật OABC có chu vi không đổi với A, C là các điểm thay đổi thuộc Ox, Oy. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ B vuông góc với đường chéo AC luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy. Giả sử $A(a;0)$, $C(0;c) \Rightarrow B(a;c)$, $a > 0, c > 0$, đặt $a+c=b$
 a, c thay đổi. b cố định.

Đường vuông góc kẻ từ B vuông góc với AC là $\Delta: y = \frac{a}{c}x + b\left(1 - \frac{a}{c}\right)$

Suy ra Δ đi qua điểm cố định là $D(b;b)$

Bài 3.154. Cho đường tròn tâm O bán kính bằng a. Có hai đường kính vuông góc với nhau là AB và CD. M, N lần lượt là các điểm di động trên đoạn OD, OC sao cho $CN = OM$. Đường thẳng AM cắt đường tròn lần nữa tại P.

Với vị trí nào của điểm M, N thì $\widehat{ANP} = 90^\circ$

Hướng dẫn giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tâm đường tròn trùng gốc tọa độ và $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Ox$

Đặt $CN = OM = t$, $0 \leq t \leq a$

Ta có $O(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;a)$, $C(0;a)$, $D(0;-a)$, $N(0;a-t)$, $M(0;-t)$

Ta xác định được $P\left(\frac{a(a^2-t^2)}{a^2+t^2}; -\frac{2a^2t}{a^2+t^2}\right)$ từ đó suy ra $\widehat{ANP} = 90^\circ \Leftrightarrow t=0$

hoặc $t=a$

Bài 3.155: Cho đường thẳng Δ không cắt đường tròn $C(I;R)$. M, N là hai điểm di động nằm trên đường thẳng Δ sao cho đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc ngoài với đường tròn $C(I;R)$. Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm A sao cho từ đó nhìn đoạn thẳng MN dưới một góc vuông.

Hướng dẫn giải

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $\Delta \equiv Ox$, $I \in Oy$

Đặt $d = d(I;\Delta)$ ($d > R$) $\Rightarrow I(0;d)$

Gọi J là trung điểm của MN, $JM = r$ (r thay đổi)

Giả sử $J(x_0;0) \Rightarrow M(x_0+r;0)$, $N(x_0-r;0)$

$C(I;R)$ tiếp xúc với $C(J;r) \Leftrightarrow IJ = r+R \Leftrightarrow x_0^2 + d^2 = (r+R)^2$

Do tính đối xứng nên nếu A tồn tại thì $A \in Oy$, đặt $A(0;h)$

Ta có $\frac{1}{\cos^2 \widehat{MAN}} = 1 + \frac{4h^2r^2}{(R^2 - d^2 + h^2 + 2rR)^2}$ là hằng số

Suy ra $R^2 - d^2 + h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \pm \sqrt{d^2 - R^2}$

Suy ra $A(0; \pm \sqrt{d^2 - R^2})$, khi đó $\frac{1}{\cos^2 \widehat{MAN}} = 1 + \frac{h^2}{R^2} = \frac{d^2}{R^2}$ không đổi

Bài 3.156: Cho A, B, C, D là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng, theo thứ tự đó. Đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại X và Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là điểm nằm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N. Chứng minh các đường thẳng AM, DN cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng XY.

Hướng dẫn giải

Ta có: $XY \perp AD$

Gắn hệ trục tọa độ Oxy với $Z \equiv O$; $A \in Ox$, $X \in Oy$

Gọi $A(a;0)$, $B(b;0)$, $C(c;0)$, $D(d;0)$, $P(0;p)$ (a, b, c, d khác nhau; $p \neq 0$)

Ta có $CM: px + cy - cp = 0$, $BN: px + by - bp = 0$

$AM \perp CM \Rightarrow AM: cx - py - ca = 0$

$DN \perp BN \Rightarrow DN: bx - py - bd = 0$

$I = DN \cap AM$ có tọa độ là nghiệm hệ: $\begin{cases} cx - py - ca = 0 \\ bx - py - bd = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{ca - bd}{c - b}$

Mặt khác ΔAXC vuông tại X có đường cao $XZ \Rightarrow XZ^2 = ZA \cdot ZC$

ΔBXD vuông tại X có đường cao $XZ \Rightarrow XZ^2 = ZB \cdot ZD$

$\Rightarrow ZA \cdot ZC = ZB \cdot ZD \Leftrightarrow ac = bd \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow I \in XY$

Bài 3.157: Cho điểm A nằm trên đường tròn (C) tâm I và gọi Δ là tiếp tuyến tại A của đường tròn (C). Gọi M sao cho khoảng cách từ M tới Δ bằng độ dài tiếp tuyến MT kẻ tới đường tròn (C) với T là tiếp điểm.

a) Tìm tập hợp điểm M

b) Chứng minh đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Hướng dẫn giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A \equiv O$, $\Delta \equiv Oy$, $I(R;0)$ (R là bán kính đường tròn (C))

a) Khi đó mỗi điểm $M(x;y)$ trong hệ trục, ta có $MH = d(M;Ay) = |x|$ và

$MT^2 = MI^2 - IT^2 = (x-R)^2 + y^2 - R^2$.

Vậy $MH = MT \Leftrightarrow x^2 = (x-R)^2 + y^2 - R^2 \Leftrightarrow y^2 = 2Rx \Rightarrow M \in (P): y^2 = 2Rx$

$$\text{Ngược lại } M\left(\frac{y^2}{2R}; y\right) \in (P) \Rightarrow d(M; Ay) = \frac{y^2}{2R}, MT^2 = MI^2 - R^2 = \left(\frac{y^2}{2R}\right)^2$$

Do đó $MT = d(M; Ay)$

Vậy tập hợp điểm M là đường parabol có đỉnh A và tiêu điểm là trung điểm của AI.

b) Gọi l là đường chuẩn của (P) khi đó $l: x = -\frac{R}{2}$.

$$\text{Với } M(x_M; y_M) \Rightarrow MI = d(M; l) = x_M + \frac{R}{2} = MT + \frac{R}{2}$$

Vậy đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 3.158. Cho tam giác ABC có phân giác trong và ngoài tại đỉnh C cắt cạnh AB lần lượt tại D và E. Biết rằng $CD = CE$. Chứng minh $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Do $CD = CE$ nên tam giác CDE vuông cân tại C.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm DE và C thuộc trục tung thì $A(a; 0), B(b; 0), C(0; c), D(-c; 0), E(c; 0)$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{DA^2}{DB^2} = \frac{CA^2}{CB^2} \Rightarrow \frac{(a-c)^2}{(b-c)^2} = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} \Rightarrow b = \frac{c^2}{a} \Rightarrow B\left(\frac{c^2}{a}; 0\right).$$

$$\text{Ta có } AB^2 + AC^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) = (c^2 + \frac{c^4}{a^2}) + (a^2 + c^2) = \left(\frac{a^2 + c^2}{a}\right)^2.$$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = (x-b)^2 + y^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-c)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2ax + a^2 = -2\frac{xc^2}{a} + \frac{c^4}{a^2} \\ -2ax + a^2 = -2cy + c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{a^2 + c^2}{2a}; c\right)$$

$$\text{Do đó } 4R^2 = 4IC^2 = \left(\frac{a^2 + c^2}{a}\right)^2.$$

Từ đó suy ra $AB^2 + AC^2 = 4R^2$.

Chuyên đề IV: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VÀ VECTO VÀO GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ

1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN THƯỜNG DÙNG.

a) Các kiến thức của chương phương pháp tọa độ trong mặt phẳng: phương trình đường thẳng, đường tròn, elip, ...

b) Một số bất đẳng thức vectơ.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Cho các vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1), \vec{v} = (x_2; y_2)$ khi đó ta có

$$+ |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$+ |\vec{u} - \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng

$$+ ||\vec{u}| - |\vec{v}|| \leq |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow \left| \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \right| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$+ \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$+ \vec{u} \cdot \vec{v} \geq -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \geq -\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng

Chú ý: - Nếu $x_2 \neq 0, y_2 \neq 0$ thì

$$+ \text{Hai vectơ } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \geq 0$$

$$+ \text{Hai vectơ } \vec{u}, \vec{v} \text{ ngược hướng} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \leq 0$$

- Bất đẳng thức đầu có thể mở rộng lên n vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ khi đó

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n| \leq |\vec{u}_1| + |\vec{u}_2| + \dots + |\vec{u}_n|$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ cùng hướng.

2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

- Khi gặp các bài toán đại số mà mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai

$\sqrt{A}, \sqrt{B}, \dots$ có thể biểu diễn dưới dạng $\sqrt{A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \sqrt{B} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \dots$ ta thiết lập các điểm, vectơ có tọa độ thích hợp sao cho độ dài các đoạn thẳng, vectơ đó tương ứng bằng $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \dots$ rồi sử dụng các bất đẳng thức hình học cơ bản (bất đẳng thức về độ dài các cạnh tam giác, bất đẳng thức về độ dài đường gấp khúc, ...) và các kiến thức trên để giải quyết bài toán.

- Khi gặp các bài toán đại số mà biểu thức có dạng $ax + by + c = 0$,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \text{thì ta chuyển bài toán đại số sang bài}$$

toán hình học được xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

3. CÁC VÍ DỤ.

a) Ứng dụng trong giải phương trình, bất phương trình.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}.$

b) $\left| \sqrt{x^2 + 4x + 13} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \right| = \sqrt{13}$

Lời giải

- a) Điều kiện xác định : $x \geq 0$.

$$\text{Đặt } \vec{u}(2\sqrt{2}; \sqrt{x+1}), \vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}; \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x}$$

$$\text{và } |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{8+x+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1}} = \sqrt{x+9}$$

Do đó $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \text{ (tmdk)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{7}$.

b) pt $\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x+2)^2 + 9} - \sqrt{(x-1)^2 + 1} \right| = \sqrt{13}$

$$\text{Đặt } \vec{u}(x+2; 3), \vec{v}(x-1; 1)$$

$$\text{Ta có } |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{13}, |\vec{u}| - |\vec{v}| = \sqrt{(x+2)^2 + 9} - \sqrt{(x-1)^2 + 1}$$

Do đó $||\vec{u}| - |\vec{v}|| = |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng (*)

Ta có $x = 1$ không là nghiệm của phương trình.

$$\text{Xét } x \neq 1 \text{ khi đó } (*) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm là } x = \frac{5}{2}$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình sau $\sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

Lời giải

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 1} \geq \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + (x+1)^2} \quad (*)$$

Trong mặt phẳng Oxy xét các vectơ $\vec{u}(x; x+1), \vec{v}(1; x)$ khi đó ta có

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(x-1)^2 + 1}, |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + 2x + 1}, |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + 1}$$

Do đó (*) trở thành $|\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Mặt khác ta luôn có $|\vec{u} - \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Suy ra $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ hay $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng

Để thấy $x = 0$ là nghiệm của bất phương trình.

Với $x \neq 0$ thì $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng khi và chỉ khi

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) Ứng dụng trong giải hệ phương trình, hệ bất phương trình.

Ví dụ 3: Giải hệ
$$\begin{cases} x(y-1) + yz = 0 \\ x(2z-3) + y(x-z) = 0 \\ (2z-3)^2 + (x-z)^2 = (y-1)^2 + z^2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Xét } \vec{u}(x; y), \vec{v}(y-1; z), \vec{w}(2z-3; x-z).$$

Từ hệ suy ra $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (1), $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ (2), $\vec{v}^2 = \vec{w}^2$ (3)

* TH1: Nếu $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0$ thay vào hệ suy ra $z = 1$ hoặc $z = 2$.

* TH2: Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ từ (1) và (2) suy ra $\vec{v}, \vec{w}$ cùng phương.

Mặt khác có $\vec{v}^2 = \vec{w}^2$ nên ta suy ra $\vec{v} = \pm \vec{w}$.

$$+ \text{ Với } \vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = 2z-3 \\ z = x-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z-2 \\ x = 2z \end{cases}$$

Thay x, y vào phương trình đầu ta được

$$2z(2z-3) + (2z-2)z = 0 \Leftrightarrow 2z(3z-4) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ hoặc } z = \frac{4}{3}$$

Nếu $z = 0 \Rightarrow x = 0, y = -2$, nếu $z = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}, y = \frac{2}{3}$

+ Với $\vec{v} = -\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=3-2z \\ z=z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2z \\ x=0 \end{cases}$

Thay x, y vào phương trình đầu ta được $z(4-2z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ hoặc $z = 2$

Nếu $z = 0 \Rightarrow y = 4$, nếu $z = 2 \Rightarrow y = 0$

Vậy nghiệm của hệ là: $(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, -2, 0), (0, 4, 0)$ và $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+ay-a=0 \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases} \quad (*)$

a) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Giả sử hệ có nghiệm là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$.

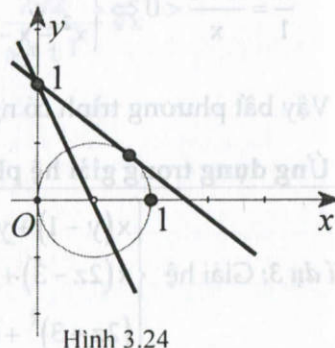
Chứng minh rằng $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 1$

Lời giải (hình 3.24)

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+a(y-1)=0 & (1) \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$

Xét hệ trục tọa độ Oxy.

Khi đó phương trình (1) là phương trình đường thẳng Δ , luôn qua điểm cố định có tọa độ $(0; 1)$.



Hình 3.24

Phương trình (2) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ bán kính

$$R = \frac{1}{2}.$$

a) Ta có số giao điểm của đường thẳng Δ và đường tròn (C) là số nghiệm của hệ phương trình.

Vậy để hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = \frac{\left|\frac{1}{2} + a \cdot 0 - a\right|}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

b) Ta có $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là 2 nghiệm của hệ suy ra đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{Mặt khác ta có } AB \leq 2R = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Vậy } (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 1$$

Ví dụ 5: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{2xy+m} \geq 1 \\ x+y \leq 1 \end{cases} \quad (*)$$

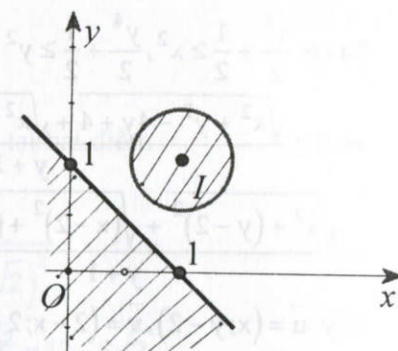
Lời giải (hình 3.25)

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy+m} \geq 1-x-y \\ x+y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+m \geq (1-x-y)^2 \\ x+y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+m \geq 1+x^2+y^2-2x+2xy-2y \\ x+y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq m+1 & (1) \\ x+y \leq 1 & (2) \end{cases}$$



Hình 3.25

Xét hệ trục tọa độ Oxy. Ta có những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn (1) là những điểm nằm trên và trong đường tròn tâm $I(1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{m+1}$ (như hình vẽ), những điểm $M(x; y)$ thỏa mãn (2) là miền gạch chéo và đường thẳng $x+y=1$.

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi số thực x ta luôn có

$$\sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-2x+5} \geq \sqrt{13}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \vec{u}(x+1;1), \vec{v}(1-x;2)$$

$$\text{Khu đó ta có } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{13} \text{ và } |\vec{u}| + |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

$$\text{Vì } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \text{ nên } \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \geq \sqrt{13}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } 2(x+1) = 1-x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Ví dụ 7: Cho hai số thực x, y với $y > -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{\sqrt{\frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} - 4y + 5} + \sqrt{\frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} + 8y^2 - 4x - 12y + 9}}{y+1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} \geq x^2, \frac{y^4}{2} + \frac{1}{2} \geq y^2$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} + \sqrt{x^2 + 9y^2 - 4x - 12y + 8}}{y+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (3y-2)^2}}{y+1}$$

$$\text{Lấy } \vec{u} = (x; y-2), \vec{v} = (2-x; 2-3y) \text{ thì}$$

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(2-x)^2 + (2-3y)^2} \\ \geq \sqrt{(x+2-x)^2 + (y-2+2-3y)^2} = 4\sqrt{y^2 + 1}$$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxki ta có

$$4\sqrt{y^2 + 1} \geq 2\sqrt{2}(y+1) \text{ suy ra } S \geq 2\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

$$\text{Vậy } \min S = 2\sqrt{2}$$

Ví dụ 8: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$ và $c + d = 4$. Chứng minh rằng: $ac + cd + db \leq 4 + 4\sqrt{2}$

Lời giải (hình 3.26)

$$\text{Ta có } ac + cd + db \leq 4 + 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq a^2 + b^2 + (c+d)^2 - 8 - 8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 12 - 8\sqrt{2}$$

Trong hệ trục tọa độ Oxy xét $M(a;b), N(c;d)$

khi đó M, N lần lượt nằm trên đường tròn

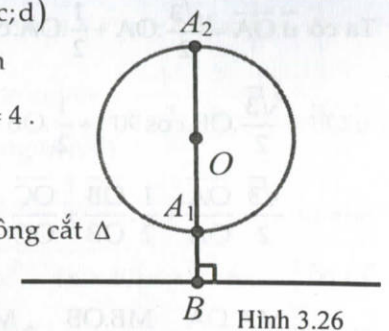
$$(C): x^2 + y^2 = 4 \text{ và đường thẳng } \Delta: x + y = 4.$$

$$\text{Khi đó } MN^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2.$$

Ta có (C) có tâm O bán kính $R = 2$ và không cắt Δ

Đường thẳng d đi qua O và vuông góc

với Δ có phương trình là $d: x - y = 0$.



Hình 3.26

Tọa độ giao điểm B của đường thẳng Δ và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2;2)$$

Tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và đường tròn (C) là nghiệm của

$$\text{hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \sqrt{2} \\ x = y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm

$$A_1(\sqrt{2}; \sqrt{2}), A_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

$$\text{Do đó } A_1B = \sqrt{2(2-\sqrt{2})^2} < A_2B = \sqrt{2(2+\sqrt{2})^2}$$

$$\text{Ta có } MN \geq \min\{A_1B; A_2B\} \Rightarrow MN^2 \geq A_1B^2 = 12 - 8\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv A_1$ hay $a = b = \sqrt{2}$ và $N \equiv B$ hay $c = d = 2$ đpcm.

Ví dụ 9: Cho x, y là hai số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3x^2 + 3(y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y+3)^2}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y+3)^2}$$

Xét hệ trục tọa độ Oxy. Gọi $A(0;1), B(-1;0), C(\sqrt{3};-3)$ và $M(x;y)$ khi đó

$$P = \sqrt{3}MA + MB + 2MC$$

$$\text{Để thấy } \widehat{BOC} = 120^\circ, \widehat{COA} = 150^\circ, \widehat{AOB} = 90^\circ$$

$$\text{Đặt } \vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\vec{OA}}{OA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{OB}}{OB} + \frac{\vec{OC}}{OC}$$

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot OA + \frac{1}{2} \cdot OA \cdot \cos 90^\circ + OA \cdot \cos 150^\circ = OA \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 150^\circ \right) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot OB \cdot \cos 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot OB + OB \cdot \cos 120^\circ = OB \left(\frac{1}{2} + \cos 120^\circ \right) = 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\vec{OA}}{OA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{OB}}{OB} + \frac{\vec{OC}}{OC} = \vec{0}$$

Ta có

$$P = \sqrt{3} \frac{\vec{MA} \cdot \vec{OA}}{OA} + \frac{\vec{MB} \cdot \vec{OB}}{OB} + 2 \frac{\vec{MC} \cdot \vec{OC}}{OC} \geq \sqrt{3} \frac{\vec{MA} \cdot \vec{OA}}{OA} + \frac{\vec{MB} \cdot \vec{OB}}{OB} + 2 \frac{\vec{MC} \cdot \vec{OC}}{OC}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} \frac{\vec{MA} \cdot \vec{OA}}{OA} + \frac{\vec{MB} \cdot \vec{OB}}{OB} + 2 \frac{\vec{MC} \cdot \vec{OC}}{OC} \\ &= \vec{MO} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\vec{OA}}{OA} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{OB}}{OB} + \frac{\vec{OC}}{OC} \right) + \sqrt{3} \cdot OA + OB + 2OC \\ &= \sqrt{3} \cdot OA + OB + 2OC = \sqrt{3} + 1 + 2 \cdot \sqrt{3+9} = 5\sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

Suy ra $P \geq 1 + 5\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi $M \equiv O$ hay $x = y = 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1 + 5\sqrt{3}$.

3. BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 3.159: Giải phương trình $x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$

Hướng dẫn giải

ĐK: $-1 \leq x \leq 3$

$$\text{Đặt } \vec{u}(x;1), \vec{v}(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x}) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \text{ và } |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 2\sqrt{x^2+1}$$

Do đó $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

Để thấy $x=0$ không là nghiệm.

Xét $x \neq 0$ khi đó $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\sqrt{3-x}}{1} \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=1+\sqrt{2}.$$

Bài 3.160: Giải phương trình sau $\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x^2+2x+10} = \sqrt{29}$

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho xác định với mọi x .

$$\text{Ta có pt } \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(x+1)^2+9} = \sqrt{29}$$

Xét hai vectơ $\vec{u}=(x-1;2); \vec{v}=(-x-1;3)$

$$\text{Khi đó } |\vec{u}| = \sqrt{x^2-2x+5}; |\vec{v}| = \sqrt{x^2+2x+10} \text{ và } \vec{u} + \vec{v} = (-2;5) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{29}$$

$$\text{Do đó } |\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ suy ra } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng } \Leftrightarrow \frac{x-1}{-x-1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

(Vì $x=-1$ không phải là nghiệm của phương trình)

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{5}$.

Bài 3.161: Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2-4x+40} = x^2+5x+\frac{45}{5}$

Hướng dẫn giải

Xét hai vectơ $\vec{u}=(x-1;-2); \vec{v}=(2-x;6)$

Từ phương trình ta có $||\vec{u}|-|\vec{v}|| = |\vec{u}+\vec{v}| \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng

Từ đó tìm được nghiệm của phương trình là $x = -\frac{5}{2}$

Bài 3.162: Giải bất phương trình $\sqrt{x-1} + x-3 \geq \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$

Hướng dẫn giải

ĐK: $x \geq 1$

Xét hai vectơ $\vec{u}=(x-3;\sqrt{x-1}); \vec{v}=(1;1)$

Khi đó ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(x-3)^2+x-1}; |\vec{v}| = \sqrt{2}; \vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{x-1} + x-3$

Từ trên và bất phương trình ta thấy $\vec{u} \cdot \vec{v} \geq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| (*)$

Mà ta luôn có $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ do đó $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow x-3 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10=0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

Vậy $x=5$ là nghiệm duy nhất của bất phương trình.

$$\text{Bài 3.163: Giải hệ } \begin{cases} x^2+y^2=-y(x+z) \\ x^2+x+y=-2yz \\ 3x^2+8y^2+8xy+8yz=2x+4z+2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Hệ trở thành } \begin{cases} x(x+y)+y(y+z)=0 \\ x(x+1)+y(2z+1)=0 \\ 4(x+y)^2+4(y+z)^2=(x+1)^2+(2z+1)^2 \end{cases}$$

Chọn $\vec{u}(x; y), \vec{v}(x + y; y + z), \vec{w}(x + 1; 2z + 1)$.

Từ hệ suy ra $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (1), $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ (2), $4\vec{v}^2 = \vec{w}^2$ (3)

Nếu $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$

Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ từ (1) và (2) suy ra $\vec{v}, \vec{w}$ cùng phương, mặt khác $4\vec{v}^2 = \vec{w}^2$ nên ta suy ra $\vec{w} = \pm 2\vec{v}$.

Từ đó suy ra $x = 0, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm (x, y, z) của hệ là: $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 3.164. Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z).$$

Hướng dẫn giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy ta đặt:

$$\vec{u} = \left(x + \frac{y}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}y\right); \vec{v} = \left(y + \frac{z}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}z\right); \vec{w} = \left(z + \frac{x}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}x\right);$$

Từ tính chất $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$ ta có đpcm.

Bài 3.165: Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Có $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ và $ac + bd = 0$. Tính $ab + cd$.

Hướng dẫn giải

Chọn $\vec{u}(a; b), \vec{v}(c; d)$. Khi đó theo đề bài có: $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Do

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ nên $\vec{u}(a; b)$ cùng phương với $\vec{w}(-d; c)$.

Theo giả thiết ta có $|\vec{u}| = |\vec{w}| = 1 \Rightarrow \vec{u} = \pm \vec{w}$

$$\text{Nếu } \vec{u} = \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases} \Rightarrow ab = -dc \Leftrightarrow ab + dc = 0.$$

$$\text{Nếu } \vec{u} = -\vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow ab = -dc \Rightarrow ab + dc = 0.$$

Kết luận: $ab + dc = 0$.

Bài 3.166: Giả sử hệ $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$ có nghiệm.

Chứng minh rằng $xy + yz + zx \leq 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn $\vec{u}\left(y + \frac{x}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \vec{v}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z; y + \frac{z}{2}\right)$. Từ hệ ta có: $|\vec{u}| = \sqrt{3}, |\vec{v}| = 4$.

Mặt khác: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}(xy + yz + zx)$, mà $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 4\sqrt{3}$.

Như vậy suy ra: $xy + yz + zx \leq 8$ (đpcm).

Bài 3.167: Cho $2x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$$

Hướng dẫn giải

$$y = 2x - 2 \Rightarrow A = \sqrt{5x^2 - 4x + 1} + \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$$

$$\text{Đặt } \vec{u} = \left(x - \frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right); \vec{v} = (2 - x; 1) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{8}{5}; \frac{6}{5}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$

$$A = \sqrt{5}(|\vec{u}| + |\vec{v}|) \geq \sqrt{5}|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{5} \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = 2\sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra $x = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow \min A = 2\sqrt{5}$ đạt được khi và chỉ khi: $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}$

Bài 3.168: Cho x, y là hai số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y + 1} + \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y + 1} + \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 4}.$$

Hướng dẫn giải

$$P = \sqrt{2} \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2} \right)$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét các điểm

$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), C(-1; -1) \text{ và } M(x; y) \text{ bất kì.}$$

Khi đó $P = \sqrt{2}(MA + MB + MC)$

Để thấy tam giác ABC khi đó tồn tại điểm I sao cho

$$\widehat{BIC} = \widehat{CIA} = \widehat{AIB} = 120^\circ \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

Do đó $P = \sqrt{2}(MA + MB + MC) \geq \sqrt{2}(IA + IB + IC) = 2 + \sqrt{3}$

Vậy $\min P = 2 + \sqrt{3}$ khi $x = y = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Bài 3.169: Chứng minh rằng nếu $a > c > 0$ và $b > c > 0$ thì

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét } \begin{cases} \vec{u} = (\sqrt{c}; \sqrt{b-c}) \\ \vec{v} = (\sqrt{a-c}; \sqrt{c}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{b} \\ |\vec{v}| = \sqrt{a} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a-c}} = \frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{c}} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$$

Bài 3.170: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x - y + 2011$ biết

$$x, y \text{ là các số thực thỏa mãn } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|. \text{ Xét } \vec{u} = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}\right) \text{ và } \vec{v} = (6, -2).$$

Áp dụng bất đẳng thức trên có:

$$\left| \frac{x}{3} \cdot 6 + \frac{y}{2} \cdot (-2) \right| \leq \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \cdot \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} \Leftrightarrow -2\sqrt{10} \leq 2x - y \leq 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Suy ra } 2011 - 2\sqrt{10} \leq P \leq 2011 + 2\sqrt{10}.$$

$$\min P = 2011 - 2\sqrt{10} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{\sqrt{10}}, y = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\max P = 2011 + 2\sqrt{10} \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{10}}, y = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

Bài 3.171: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$ và $c - d = 3$.

$$\text{Chứng minh rằng } ac + bd - cd \leq \frac{9 + 6\sqrt{2}}{4}$$

Hướng dẫn giải

$$\text{BDT} \Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq (c-d)^2 + a^2 + b^2 - \frac{9 + 6\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq \frac{11 - 6\sqrt{2}}{2}$$

Trong hệ trục tọa độ Oxy xét $M(a; b), N(c; d)$ khi đó M, N lần lượt nằm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ và đường thẳng $\Delta: x - y = 3$.

$$\text{Khi đó } MN^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2.$$

Ta có (C) có tâm O bán kính $R = 1$ và không cắt Δ

Đường thẳng d đi qua O và vuông góc với Δ có phương trình là $d: x + y = 0$.

$$\text{Ta có } d \text{ cắt } \Delta \text{ tại } B\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right), \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm } A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), A_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Ta có } MN \geq \min\{A_1B; A_2B\} \Rightarrow MN^2 \geq A_1B^2 = \frac{11 - 6\sqrt{2}}{2} \text{ đpcm.}$$

Bài 3.172: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = 2x - y$ với x, y thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 5$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 2x - y - P = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \text{ với } P \text{ là tham số}$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $\Delta: 2x - y - P = 0$ cắt đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 5$ có tâm là gốc tọa độ O và bán kính $R = \sqrt{5}$

$$\text{hay } d(O; \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|-P|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow -5 \leq P \leq 5$$

Từ đó $\min P = -5$ khi $x = -2, y = 1$ và $\max P = 5$ khi $x = 2, y = -1$

Bài 3.173: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x + y$ với x, y thỏa mãn điều kiện $(x-2)^2 + 8(y+3)^2 = 8$

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x - 2, b = 2\sqrt{2}(y + 3)$ khi đó bài toán trở thành " tìm giá trị lớn nhất

Và nhỏ nhất của $P = a + \frac{b}{2\sqrt{2}} - 1$ với a, b thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = 8$ đến

đây làm tương tự bài trên.

Từ đó $\min P = -4, \max P = 2$.

Bài 3.174: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2$ với x, y thỏa mãn điều kiện $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Hướng dẫn giải

Trong hệ trục tọa độ Oxy. Xét đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm $I(-1; 1)$ bán kính $R = 2$. $M(x; y) \in (C)$ khi đó $OM^2 = P = x^2 + y^2$.

Bài toán trở thành tìm M trên đường tròn (C) sao cho OM nhỏ nhất, lớn nhất. Gọi A, B là giao điểm của OI với đường tròn (C) khi đó $\min\{OA;OB\} \leq OM \leq \max\{OA;OB\}$

Ta có OI: $x + y = 0$, tọa độ giao OI với đường tròn (C) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$A(\sqrt{2} - 1; 1 - \sqrt{2}), B(-1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$$

Dễ thấy $OB > OA$ suy ra $\min P = 6 - 4\sqrt{2}$, $\max P = 6 + 4\sqrt{2}$

Bài 3.175: Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = c^2 + d^2 - 2ac - 2bd + 1$. Với a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } P = (a - c)^2 + (b - d)^2$$

Trong hệ trục tọa độ Oxy.

Xét điểm $M(a; b), N(c; d)$ khi đó $M \in (C): x^2 + y^2 = 1, N \in (P): y = x^2 + 3$

Ta có $N_0(0; 3) = O_y \cap (P), M_0(0; 1) \in (C)$

$$\text{Dễ thấy } P = MN^2 \geq M_0N_0^2 = 2$$

Vậy $\min P = 2$ khi $a = 0, b = 1, c = 0, d = 3$.

Bài 3.176: Tìm a để phương trình sau có 2 nghiệm $\sqrt{x - x^2} = a - x$ (*)

Hướng dẫn giải

Với điều kiện $x - x^2 \geq 0$, đặt $y = \sqrt{x - x^2}, y \geq 0$

$$(*) \text{ trở thành } \begin{cases} y + x = a \\ y^2 + x^2 - x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a & (1) \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} & (2) \\ y \geq 0 & (3) \end{cases}$$

(2) và (3) là phương trình nửa đường tròn lấy phần trên trục hoành, có tâm

$I(\frac{1}{2}; 0)$ bán kính $R = \frac{1}{2}$. (1) là phương trình đường thẳng $x + y = a$. Từ đó

suy ra để phương trình có nghiệm là $0 \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Bài 3.177: Cho tám số thực $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong sáu số:

$x_1x_3 + x_2x_4; x_1x_5 + x_2x_6; x_1x_7 + x_2x_8; x_3x_5 + x_4x_6; x_3x_7 + x_4x_8; x_5x_7 + x_6x_8$ không âm.

Hướng dẫn giải

Xét bốn vector $\overline{u_1}(x_1, x_2), \overline{u_2}(x_3, x_4), \overline{u_3}(x_5, x_6), \overline{u_4}(x_7, x_8)$

Ta có $\overline{u_1} \cdot \overline{u_2} = x_1x_3 + x_2x_4; \overline{u_1} \cdot \overline{u_3} = x_1x_5 + x_2x_6; \dots; \overline{u_3} \cdot \overline{u_4} = x_5x_7 + x_6x_8$

Do ít nhất có một trong các góc giữa bốn góc vector trên không vượt quá 90° nên ít nhất một trong sáu tích vô hướng là không âm.

Bài 3.178: Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b)$ và $c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d)$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$.

Hướng dẫn giải

Viết hai giả thiết lại dưới dạng $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 1, (c - 6)^2 + (d - 6)^2 = 36$

Trong mặt phẳng Oxy xét các điểm $M(a; b), N(c; d)$ khi đó $P = MN$ và

$M \in (C): (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 1$ và $N \in (C'): (c - 6)^2 + (d - 6)^2 = 36$

Ta có (C) có $I(1; 1), R = 1$ và (C') có $I'(6; 6), R' = 6$

Suy ra $II' - (R + R') \leq MN \leq II' + (R + R')$

Từ đó ta có $\max P = 5\sqrt{2} + 7$ khi $a = b = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, c = d = 6 + 3\sqrt{2}$

$\min P = 5\sqrt{2} - 7$ khi $a = b = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, c = d = 6 - 3\sqrt{2}$

Bài 3.179 Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 5$.

Chứng minh rằng $\sqrt{5 - a - 2b} + \sqrt{5 - c - 2d} + \sqrt{5 - ac - bd} \leq \frac{3\sqrt{30}}{2}$

Hướng dẫn giải

BĐT

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(a - 1)^2 + (b - 2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(c - 1)^2 + (d - 2)^2}{2}} + \sqrt{\frac{(a - c)^2 + (b - d)^2}{2}} \leq \frac{3\sqrt{30}}{2} (*)$$

Trong hệ trục tọa độ Oxy xét các điểm $A(a;b)$, $B(c;d)$ và $C(1;2)$ khi đó

$$A, B, C \in (C): x^2 + y^2 = 5$$

$$\text{Ta có } VT(*) = \frac{\sqrt{2}}{2}(AB + BC + CA) = \sqrt{2}R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\text{Theo bài 17 chuyên đề II ta có } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra } VT(*) \leq \frac{3\sqrt{30}}{2} \text{ đpcm.}$$

Bài 3.180: Cho bốn số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $\left| \frac{bc-ad}{ac+bc} \right| = \sqrt{3}$.

$$\text{Chứng minh rằng } \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \geq \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}).$$

Hướng dẫn giải

$$\left| \frac{bc-ad}{ac+bc} \right| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left| \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}} \right| = \sqrt{3} (*)$$

$$\text{Đặt } k_1 = \frac{b}{a} > 0, k_2 = \frac{d}{c} > 0 \Rightarrow b = k_1 a, d = k_2 c$$

Trong mặt phẳng tọa độ xét các điểm $M(a;b)$, $N(c;d)$ khi đó

$$M \in \Delta_1: y = k_1 x, N \in \Delta_2: y = k_2 x \text{ (với } x > 0).$$

Từ (*) suy ra $\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ với α là góc hợp bởi hai đường thẳng

$$\Delta_1, \Delta_2 \text{ suy ra } \widehat{MON} = 60^\circ$$

Theo định lý côsin ta có

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM.ON.\cos 60^\circ = OM^2 + ON^2 - OM.ON$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2}(OM^2 + ON^2) \geq OM.ON \text{ và } \frac{1}{2}(OM^2 + ON^2) \geq \frac{1}{4}(OM + ON)^2$$

$$\text{Suy ra } MN^2 \geq \frac{1}{4}(OM + ON)^2 \Rightarrow MN \geq \frac{1}{2}(OM + ON)$$

$$\text{Thay } MN = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}, OM = \sqrt{a^2 + b^2}, ON = \sqrt{c^2 + d^2}$$

Suy ra đpcm.

Mục lục

CHƯƠNG 1: VECTO

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA	3
§2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTO.....	10
§3. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ	18
§4. TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ.....	51
Chuyên đề I: ỨNG DỤNG VECTO ĐỂ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC	66

CHƯƠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ 0° ĐẾN 180°	85
§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO.....	97
§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	124
Chuyên đề II: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG.....	148

CHƯƠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG	175
§2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG.....	187
§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC.....	204
§4. ĐƯỜNG TRÒN	217
§5. ĐƯỜNG ELIP.....	244
§6. ĐƯỜNG HYPEBOL.....	255
§7. ĐƯỜNG PARABOL	264
§8. BA ĐƯỜNG CÔNIC.....	270
Chuyên đề III: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VÀO CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG	296
Chuyên đề IV: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VÀ VECTO VÀO GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ	319



CÔNG TY TNHH MỘT THÀNH VIÊN DVVH KHANG VIỆT

Nhà Sách **KHANG VIỆT**

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P. Đakao - Quận 1 - Tp. Hồ Chí Minh

Điện thoại: (08) 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968

Fax: (08) 39110880

Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

Website: www.nhasachkhangviet.vn



Giá: 79.000 Đ